

**Σχολή Θετικών επιστημών
Μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά
(ΜΣΜ)**

Διπλωματική Εργασία

**«Άλυτα προβλήματα στην ιστορία των μαθηματικών
Ο ρόλος τους στην εκπαίδευση σήμερα»**

Βασίλης Γιαννικόπουλος

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Αρετή Παναούρα

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή Βασίλη Γιαννικόπουλου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	4
Abstract	5
Κεφάλαιο 1° Τα άλυτα προβλήματα ως αντικείμενο ιστορικής και διδακτικής διερεύνησης ..	6
1.1 Εισαγωγή.....	6
1.2 Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας	7
Κεφάλαιο 2ο Άλυτα προβλήματα των μαθηματικών - Ιστορική αναδρομή.	9
2.1 Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας	9
2.1.1 Ο διπλασιασμός του κύβου.....	11
2.1.2 Η τριχοτόμηση μιας γωνίας	14
2.1.3 Ο τετραγωνισμός του κύκλου	15
2.1.4 Σύνοψη.....	17
2.2 Από τον Μεσαίωνα στη νεότερη εποχή: η ανάδυση νέων άλυτων προβλημάτων	18
2.2.1 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat	29
2.2.2 Η ικασία του Goldbach	34
2.2.3 Επιλυσιμότητα πολυωνυμικών εξισώσεων.....	36
2.2.4 Η ικασία του Riemann	38
2.2.5 Η υπόθεση του συνεχούς	42
2.2.6 Η ικασία του Poincare.....	45
2.2.7 Το πρόβλημα P vs NP	48
Κεφάλαιο 3°	52
3.1 Η σημασία των άλυτων προβλημάτων στη σύγχρονη εκπαίδευση	52
3.1.1 Τα τρία διάσημα προβλήματα της αρχαιότητας	57
3.1.2 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat	60
3.1.3 Η ικασία του Goldbach	62
3.1.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις	65
3.1.5 Η ικασία του Riemann	68
3.1.6 Το πρόβλημα P vs NP.....	69
3.2 Παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης στην τάξη	71
3.3 Συμπεράσματα	77
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	79

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τον ρόλο των άλυτων προβλημάτων στην ιστορία των μαθηματικών και διερευνά τη δυνατότητα αξιοποίησής τους στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση. Τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν απλώς ερωτήματα χωρίς γνωστή λύση, αλλά συνιστούν βασικό παράγοντα εξέλιξης της μαθηματικής γνώσης, καθώς η προσπάθεια επίλυσής τους οδήγησε συχνά στη διαμόρφωση νέων θεωριών, μεθόδων και μαθηματικών εργαλείων.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη σημαντικών άλυτων προβλημάτων, ξεκινώντας από τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας – τον διπλασιασμό του κύβου, την τριχοτόμηση της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου – και συνεχίζοντας με χαρακτηριστικά προβλήματα της νεότερης και σύγχρονης μαθηματικής έρευνας, όπως το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, η Υπόθεση του Riemann, τα προβλήματα του Hilbert και τα Millennium Prize Problems. Μέσα από τη μελέτη τους αναδεικνύεται ότι τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν αδιέξοδα της επιστήμης, αλλά κινητήριες δυνάμεις της μαθηματικής προόδου.

Στο δεύτερο μέρος διερευνάται η διδακτική αξιοποίηση των άλυτων προβλημάτων και της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον. Εξετάζονται θεωρητικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις που υποστηρίζουν την ένταξη ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα ανοιχτά μαθηματικά ερωτήματα μπορούν να συμβάλουν στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της διερευνητικής στάσης των μαθητών. Παράλληλα, αναδεικνύεται η σημασία της παρουσίασης των μαθηματικών ως μιας δυναμικής και εξελισσόμενης ανθρώπινης δραστηριότητας και όχι ως ενός στατικού συνόλου γνώσεων.

Η εργασία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι τα άλυτα προβλήματα μπορούν να αποτελέσουν ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο, συμβάλλοντας στην ουσιαστικότερη κατανόηση της φύσης των μαθηματικών και στη διαμόρφωση μιας πιο δημιουργικής και ανθρωποκεντρικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Abstract

This thesis examines the role of unsolved problems in the history of mathematics and investigates the potential for their incorporation into contemporary mathematics education. Unsolved problems are not merely questions without known solutions; they constitute a fundamental driver of the development of mathematical knowledge, as efforts to resolve them have frequently led to the formation of new theories, methods, and mathematical tools.

The first part of the thesis presents the historical development of significant unsolved problems, beginning with the three classical problems of antiquity - the duplication of the cube, the trisection of the angle, and the squaring of the circle - and continuing with representative problems from modern and contemporary mathematical research, including Fermat's Last Theorem, the Riemann Hypothesis, Hilbert's problems, and the Millennium Prize Problems. Through their study, it becomes evident that unsolved problems do not represent dead ends in science, but rather driving forces of mathematical progress.

The second part investigates the pedagogical application of unsolved problems and the history of mathematics within the school environment. It examines theoretical and pedagogical approaches that support the integration of historical elements into teaching, as well as the ways in which open mathematical questions can contribute to the cultivation of students' critical thinking, creativity, and spirit of inquiry. Emphasis is also placed on the importance of presenting mathematics as a dynamic and evolving human activity, rather than as a static body of knowledge.

The thesis concludes that unsolved problems can serve as a powerful pedagogical tool, contributing to a deeper understanding of the nature of mathematics and to the development of a more creative and human-centered mathematics education.

Κεφάλαιο 1^ο

Τα “άλυτα” προβλήματα ως αντικείμενο ιστορικής και διδακτικής διερεύνησης

1.1 Εισαγωγή

Τα μαθηματικά συχνά παρουσιάζονται ως μια ολοκληρωμένη, αυστηρή και κλειστή επιστήμη, στην οποία κάθε ερώτημα διαθέτει μια σαφή και τελική απάντηση. Η σχολική εμπειρία, μάλιστα, ενισχύει συχνά αυτή την εικόνα, καθώς το επίκεντρο της διδασκαλίας μετατοπίζεται στο σωστό αποτέλεσμα και στην ορθή διαδικασία επίλυσης. Ωστόσο, η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών αποκαλύπτει μια διαφορετική πραγματικότητα. Η επιστήμη αυτή δεν οικοδομήθηκε μόνο πάνω σε λύσεις, αλλά και πάνω σε ερωτήματα που παρέμειναν ανοιχτά για αιώνες.

Τα άλυτα προβλήματα (με τον όρο “άλυτα” προβλήματα ,σε όλο το εύρος της εργασίας αυτής, εννοούμε προβλήματα που όντως είναι άλυτα ή προβλήματα που για αιώνες ήταν άλυτα αλλά τελικά λύθηκαν ωστόσο κρίθηκε αναγκαίο να εμπλουτιστεί η παρούσα εργασία με τα προβλήματα αυτά διότι έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών και μπορούν να αξιοποιηθούν εκπαιδευτικά στο μέγιστο βαθμό) δεν αποτελούν παρεκκλίσεις ή αδυναμίες του μαθηματικού οικοδομήματος. Αντιθέτως, συνιστούν βασικό μηχανισμό εξέλιξης της γνώσης. Κάθε πρόβλημα που αντιστάθηκε στη λύση του λειτούργησε ως πρόκληση, ως ερέθισμα για την ανάπτυξη νέων θεωριών, νέων εργαλείων και νέων τρόπων σκέψης. Από τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας έως τα σύγχρονα προβλήματα της θεωρίας αριθμών και της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, η ιστορία των μαθηματικών δείχνει ότι η πρόοδος δεν προκύπτει μόνο από την επιβεβαίωση, αλλά και από την αμφιβολία, τον περιορισμό και τη συνειδητοποίηση των ορίων.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να μελετήσει τα άλυτα προβλήματα όχι μόνο ως ιστορικά ή τεχνικά ερωτήματα, αλλά ως φαινόμενα με βαθιά επιστημολογική και παιδαγωγική σημασία. Στόχος της δεν είναι η εξαντλητική μαθηματική ανάλυση των προβλημάτων αυτών, αλλά η κατανόηση του ρόλου τους στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης και, κυρίως, η διερεύνηση της διδακτικής τους αξιοποίησης στη σύγχρονη εκπαίδευση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας παρουσιάζεται η ιστορική αναδρομή των σημαντικότερων άλυτων προβλημάτων. Η πορεία ξεκινά από την αρχαία ελληνική γεωμετρία και τα τρία κλασικά προβλήματα, τον διπλασιασμό του κύβου, τον τετραγωνισμό του κύκλου και την τριχοτόμηση της γωνίας , τα οποία ανέδειξαν ήδη από νωρίς

τα όρια των επιτρεπτών γεωμετρικών μεθόδων και οδήγησαν, πολλούς αιώνες αργότερα, στη σύνδεση της γεωμετρίας με την άλγεβρα και τη θεωρία των κατασκευάσιμων αριθμών

Στη συνέχεια εξετάζονται άλυτα προβλήματα της νεότερης εποχής, όπως το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, η Υπόθεση του Riemann και άλλα εμβληματικά ερωτήματα που διαμόρφωσαν τη μαθηματική έρευνα. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στα 23 προβλήματα του Hilbert, τα οποία σηματοδότησαν τη συνειδητή χαρτογράφηση των ανοιχτών ερωτημάτων στις αρχές του 20ού αιώνα, καθώς και στα Millennium Prize Problems του 2000, που αποτυπώνουν τις σύγχρονες προκλήσεις των μαθηματικών. Μέσα από αυτή τη διαχρονική διαδρομή, αναδεικνύεται ότι η έννοια του «άλυτου» δεν είναι στατική, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με το θεωρητικό πλαίσιο και τα διαθέσιμα εργαλεία κάθε εποχής.

Το τρίτο κεφάλαιο μετατοπίζει το ενδιαφέρον από την ιστορική ανάλυση στη διδακτική αξιοποίηση των άλυτων προβλημάτων. Εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο η ιστορία των μαθηματικών και τα ανοιχτά ερωτήματα μπορούν να λειτουργήσουν ως παιδαγωγικά εργαλεία, ενισχύοντας την κατανόηση της φύσης της μαθηματικής γνώσης και καλλιεργώντας την κριτική σκέψη των μαθητών. Παρουσιάζονται φιλοσοφικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις που επηρέασαν τη διδασκαλία των μαθηματικών, από τις παραδοσιακές φορμαλιστικές αντιλήψεις έως τον κονστρουκτιβισμό και τις σύγχρονες ανθρωποκεντρικές θεωρήσεις.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο γεγονός ότι τα άλυτα προβλήματα μπορούν να συμβάλουν στην αποδόμηση της αντίληψης των μαθηματικών ως μιας στατικής και αμετάβλητης επιστήμης. Μέσα από την επαφή με ιστορικά και σύγχρονα ανοιχτά ερωτήματα, οι μαθητές/μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν ότι η μαθηματική γνώση εξελίσσεται, ότι η αμφιβολία και η διερεύνηση αποτελούν αναπόσπαστα στοιχεία της επιστημονικής διαδικασίας και ότι η αναζήτηση είναι εξίσου σημαντική με τη λύση.

Συνολικά, η εργασία αυτή επιχειρεί να αναδείξει μια κεντρική ιδέα: τα άλυτα προβλήματα δεν είναι απλώς κεφάλαια της ιστορίας των μαθηματικών, αλλά καθρέφτες της φύσης τους. Αποκαλύπτουν τα όρια και τις δυνατότητες της ανθρώπινης σκέψης, γεφυρώνουν το παρελθόν με το παρόν και προσφέρουν ένα γόνιμο έδαφος για τη διαμόρφωση μιας πιο ουσιαστικής, κριτικής και δημιουργικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

1.2 Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Παρότι η παρούσα εργασία κινείται σε δύο άξονες - τον ιστορικό και τον διδακτικό - είναι αναγκαίο να διευκρινιστεί ότι ο τελικός της προσανατολισμός είναι κατεξοχήν εκπαιδευτικός. Η ιστορική αναδρομή στα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών δεν αποτελεί αυτοσκοπό ούτε

επιχειρεί να λειτουργήσει ως μια απλή αφήγηση της εξέλιξης της επιστήμης. Είναι βέβαιο ότι έχουν γίνει πολύ καλύτερες προσπάθειες ιστορικής αναδρομής από την παρούσα εργασία. Αντιθέτως, εντάσσεται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο προβληματισμού: πώς μπορεί η ιστορία των μαθηματικών να συμβάλει ουσιαστικά στη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η μελέτη των άλυτων προβλημάτων, των κοινωνικών συνθηκών μέσα στις οποίες διατυπώθηκαν, των προσωπικών αγωνιών και της δημιουργικής επιμονής των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτά, αποκτά νόημα στο μέτρο που μπορεί να μεταφερθεί στη σχολική τάξη. Η ιστορία των μαθηματικών δεν αντιμετωπίζεται εδώ ως διακοσμητικό στοιχείο της διδασκαλίας, αλλά ως παιδαγωγικό εργαλείο. Μέσα από αυτήν, οι μαθητές/μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να δουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα, ως μια διαδικασία αναζήτησης και όχι απλώς ως ένα σύνολο έτοιμων αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 2°

Άλυτα προβλήματα των μαθηματικών - Ιστορική αναδρομή.

2.1 Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας

Τα μαθηματικά μπορούν να ιδωθούν ως ένα ποτάμι που ρέει αδιάκοπα μέσα στους αιώνες, όπως κάθε άλλη επιστήμη. Η παραγωγή γνώσης είναι μία αέναη διαδικασία και η μελέτη της καταδεικνύει τόσο την ιστορική διάσταση όσο και μελλοντικές κατευθύνσεις. Από την αρχαιότητα και τα τρία διάσημα άλυτα προβλήματα της γεωμετρίας έως τις σύγχρονες αποδείξεις του τελευταίου θεωρήματος του Fermat και της Εικασίας Poincaré, η μαθηματική σκέψη ανέδειξε μικρά και μεγάλα ερωτήματα, άλλα από τα οποία βρήκαν τη λύση τους και άλλα παραμένουν ακόμη ανοιχτά. Όλα όμως, ανεξαιρέτως, συνέβαλαν στη διαμόρφωση ενός πολύπλοκου και εντυπωσιακού επιστημονικού οικοδομήματος. (Singh, 1997· Szpiro, 2007).

Τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν αδιέξοδα της επιστήμης, αλλά κινητήριες δυνάμεις της εξέλιξής της. Συχνά, η προσπάθεια επίλυσής τους οδήγησε στη γέννηση νέων θεωριών, νέων εργαλείων και νέων τρόπων σκέψης, οι οποίοι ξεπέρασαν κατά πολύ το αρχικό ερώτημα που τα γέννησε. Η ιστορία των μαθηματικών δείχνει ότι ακόμη και όταν ένα πρόβλημα αποδεικνύεται αδύνατο ή παραμένει άλυτο, η ίδια η πορεία της αναζήτησης αφήνει βαθύ αποτύπωμα στη γνώση (Mancosu, et. al., 2023).

Μέσα σε αυτό το διαχρονικό πλαίσιο, τα μαθηματικά δεν εμφανίζονται ως ένα στατικό σύνολο αληθειών, αλλά ως μια ζωντανή, δυναμική διαδικασία, σε συνεχή διάλογο με το παρελθόν και το μέλλον. Κάθε γενιά μαθηματικών κληρονομεί ερωτήματα από τις προηγούμενες και, με τη σειρά της, παραδίδει νέες προκλήσεις στις επόμενες. Το «ψηφιδωτό» της μαθηματικής γνώσης δεν ολοκληρώνεται ποτέ· μετασχηματίζεται, εμπλουτίζεται και επεκτείνεται διαρκώς (Dengsø, 2023).

Στο πλαίσιο αυτό, τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας κατέχουν ξεχωριστή θέση. Αποτελούν το πρώτο συστηματικό παράδειγμα μαθηματικών ερωτημάτων που αντιστάθηκαν στη λύση για αιώνες και ανέδειξαν, ήδη από νωρίς, την έννοια των ορίων της μαθηματικής μεθόδου. Η μελέτη τους προσφέρει ένα ιδανικό σημείο εκκίνησης για την κατανόηση του ρόλου των άλυτων προβλημάτων στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, ανοίγοντας τον δρόμο για τη διερεύνηση της έννοιας του «άλυτου» από την αρχαιότητα έως τη σύγχρονη εποχή (Minati, 2019).

Στην αρχαία ελληνική μαθηματική σκέψη, η έννοια του «προβλήματος» είχε κεντρικό ρόλο. Τα μαθηματικά δεν αντιμετωπίζονταν ως σύνολο τύπων αλλά ως διαδικασία κατασκευής

και απόδειξης. Στην αρχαία Ελλάδα τα μαθηματικά ήταν κυρίως γεωμετρικές κατασκευές στις οποίες οι γεωμέτρες χρησιμοποιούσαν αυστηρά δυο μαθηματικά εργαλεία, τον κανόνα και τον διαβήτη. Ο κανόνας ήταν στην ουσία ένας χάρακας με την βοήθεια του οποίου μπορούσε κάποιος να τραβήξει ευθείες γραμμές αλλά δεν υπήρχε πουθενά η διαβάθμιση που έχει ένας τυπικός χάρακας. Οι αρχαίοι λοιπόν ήταν σε θέση να δεχτούν μόνο γεωμετρικές κατασκευές με χρήση κανόνα και διαβήτη. Αυτή ήταν μια επιλογή τόσο φιλοσοφική όσο και επιστημονική. Οι αρχαίοι είχαν κάνει μία συνειδητή επιλογή· δεν επέτρεπαν αριθμητικούς υπολογισμούς, μηχανικά βοηθήματα, ειδικές καμπύλες και μετρήσεις εμβαδών (Matthews 2022).

Τους αρχαίους δεν τους απασχολούσε αν ένα πρόβλημα μπορούσε να λυθεί με οποιονδήποτε τρόπο, τους απασχολούσε μόνο να λυθεί με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Επικρατούσε η πλατωνική κυρίως λογική, που ήθελε τα μαθηματικά ιδεατά αντικείμενα και τις αποδείξεις να βασίζονται μόνο σε καθαρές, κατ' αυτούς, κατασκευές με χρήση κανόνα και διαβήτη. Εν γένει δεν γνώριζαν αν υπήρχαν ή όχι άλυτα προβλήματα. Πίστευαν όμως ότι, αν κάτι είναι γεωμετρικά αληθές, πρέπει να κατασκευάζεται με τα πιο θεμελιώδη μέσα (Dutilh 2025). Η απαίτηση επίλυσης των γεωμετρικών προβλημάτων αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη δεν αποτελούσε τεχνικό περιορισμό, αλλά θεμελιώδη επιλογή της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας. Τα εργαλεία αυτά θεωρούνταν τα κατεξοχήν μέσα καθαρής γεωμετρικής κατασκευής, απαλλαγμένα από αριθμητικές ή εμπειρικές μετρήσεις. Η αδυναμία επίλυσης των προβλημάτων αυτών δεν αφορά τη γενική ύπαρξη λύσης, αλλά την αδυναμία εντός ενός αυστηρά καθορισμένου γεωμετρικού πλαισίου (Berinde, 2004).

Στην Αρχαία Ελλάδα διατυπώθηκαν πολλά μαθηματικά προβλήματα, τα οποία απασχόλησαν τους γεωμέτρες και φιλοσόφους της εποχής. Ορισμένα από αυτά αφορούσαν κατασκευές σχημάτων, συγκρίσεις εμβαδών και όγκων ή σχέσεις αναλογίας, ενώ άλλα συνδέονταν με πρακτικές ανάγκες ή φιλοσοφικές αναζητήσεις. Ωστόσο, αρκετά από αυτά τα προβλήματα είτε επιλύθηκαν σχετικά σύντομα είτε δεν διατυπώθηκαν με επαρκή σαφήνεια και αυστηρότητα ώστε να αποκτήσουν διαχρονική σημασία (Schoenfeld, 2016).

Σε αντίθεση με αυτά, τρία προβλήματα ξεχώρισαν και διατηρήθηκαν στο επίκεντρο της μαθηματικής σκέψης για περισσότερους από είκοσι αιώνες: ο διπλασιασμός του κύβου, ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τριχοτόμηση της γωνίας. Η ιδιαίτερη θέση τους στην ιστορία των μαθηματικών δεν οφείλεται μόνο στη δυσκολία τους, αλλά κυρίως στο γεγονός ότι διατυπώθηκαν με σαφή και αυστηρό τρόπο, εντός ενός καθορισμένου γεωμετρικού πλαισίου. Η απαίτηση επίλυσής τους αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη τα μετέτρεψε σε θεμελιώδη ερωτήματα για τα όρια της γεωμετρικής μεθόδου (Challoumis, 2023).

Ένας ακόμη λόγος για τη διαχρονική σημασία των τριών αυτών προβλημάτων είναι ότι δεν αποτελούσαν απλώς τεχνικές προκλήσεις, αλλά άγγιζαν βασικές έννοιες της γεωμετρίας, όπως η αναλογία, το εμβαδόν, ο όγκος και η γωνία. Η προσπάθεια επίλυσής τους οδήγησε στην ανάπτυξη νέων μεθόδων, στην εισαγωγή ειδικών καμπυλών και, τελικά, στην αναγνώριση των περιορισμών των κλασικών εργαλείων. Έτσι, τα προβλήματα αυτά λειτούργησαν ως καταλύτες για τη μαθηματική εξέλιξη, πολύ πέρα από το αρχικό τους περιεχόμενο (Haug, 2018).

Επιπλέον, τα τρία κλασικά προβλήματα απέκτησαν ισχυρό συμβολικό χαρακτήρα. Για αιώνες αποτέλεσαν σημείο αναφοράς για το τι σημαίνει «δύσκολο» ή «άλυτο» πρόβλημα στα μαθηματικά, ενώ η τελική απόδειξη της αδυναμίας επίλυσής τους τον 19ο αιώνα προσέδωσε σε αυτά έναν νέο ρόλο: δεν ήταν πλέον απλώς προβλήματα χωρίς γνωστή λύση, αλλά παραδείγματα μαθηματικών ερωτημάτων που καθόρισαν τα όρια ενός ολόκληρου επιστημονικού συστήματος (Dutilh 2025).

Στο πλαίσιο αυτό, η μελέτη των άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας ξεκινά αναπόφευκτα από την αναλυτική παρουσίαση των τριών αυτών περιπτώσεων. Πρώτο από αυτά είναι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, γνωστό και ως Δήλαιο πρόβλημα, το οποίο σχετίζεται με την κατασκευή ενός κύβου διπλάσιου όγκου από έναν δοθέντα (Masià, 2016). Ακολουθεί το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, που αφορά την κατασκευή τετραγώνου ίσου εμβαδού με έναν δοθέντα κύκλο, και τέλος το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας, δηλαδή της διαίρεσης μιας οποιασδήποτε γωνίας σε τρία ίσα μέρη με τα ίδια περιορισμένα μέσα. Ανάλυση των τριών αυτών προβλημάτων που ακολουθεί δεν αποσκοπεί μόνο στην ιστορική τους παρουσίαση, αλλά και στην ανάδειξη της βαθύτερης σημασίας τους για την κατανόηση της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης και της έννοιας του άλυτου προβλήματος.

2.1.1 Ο διπλασιασμός του κύβου.

Ο διπλασιασμός του κύβου αποτελεί ένα από τα αρχαιότερα και πιο χαρακτηριστικά προβλήματα της ελληνικής μαθηματικής παράδοσης. Σύμφωνα με την ιστορική αφήγηση, το πρόβλημα συνδέεται με χρησμό του μαντείου των Δελφών προς τους κατοίκους της Δήλου, οι οποίοι κλήθηκαν να διπλασιάσουν τον κυβικό βωμό του Απόλλωνα ώστε να αποτραπεί μια επιδημία. Πολύ σύντομα, ωστόσο, έγινε αντιληπτό ότι το ζήτημα δεν ήταν πρακτικό αλλά βαθύτατα μαθηματικό, καθώς απαιτούσε τη γεωμετρική κατασκευή ενός νέου κύβου με όγκο διπλάσιο από έναν δοθέντα (Bell, 1986).

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι απλή: αν ένας κύβος έχει ακμή μήκους α ζητείται η κατασκευή ενός κύβου με όγκο $2\alpha^3$, δηλαδή κύβου με ακμή $\alpha\sqrt[3]{2}$. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή της κυβικής ρίζας του 2. Η απλότητα της διατύπωσης έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη δυσκολία της επίλυσής του, γεγονός που συνέβαλε καθοριστικά στη φήμη και τη μακροβιότητά του (Katz, 2013).

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα ακολουθώντας τους αυστηρούς κανόνες της κλασικής γεωμετρίας, δηλαδή με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Στο πλαίσιο αυτό, ο διπλασιασμός του κύβου ισοδυναμούσε με την εύρεση δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων, ένα πρόβλημα που απασχόλησε έντονα γεωμέτρες όπως ο Ιπποκράτης ο Χίος. Παρά τις πολυάριθμες προσπάθειες, καμία κατασκευή με τα επιτρεπτά μέσα δεν οδήγησε σε γενική λύση (Boyer & Merzbach, 2011).

Η αποτυχία αυτή δεν σήμαινε ότι το πρόβλημα ήταν αδύνατο γενικά. Αντιθέτως, οι αρχαίοι κατάφεραν να δώσουν λύσεις χρησιμοποιώντας άλλα μέσα, τα οποία όμως δεν θεωρούνταν αποδεκτά στο πλαίσιο της καθαρής γεωμετρίας. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε ειδικές καμπύλες, όπως η έλικά που φέρει το όνομά του, ενώ άλλοι μαθηματικοί πρότειναν μηχανικές ή χωρικές κατασκευές. Παρόμοιες λύσεις βασίστηκαν στη χρήση της κωνοειδούς καμπύλης του Νικομήδη ή σε μεθόδους νέυσεως. Όλες αυτές οι προσεγγίσεις παρείχαν λύσεις στο πρόβλημα, αλλά απορρίφθηκαν ως μη σύμφωνες με τους αυστηρούς περιορισμούς των αρχαίων Ελλήνων που περιλάμβαναν χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη (Bell, 1986, Katz, 2013).

Για πολλούς αιώνες, η αδυναμία εύρεσης λύσης με τα κλασικά εργαλεία παρέμενε ένα άλυτο ερώτημα, χωρίς ωστόσο να υπάρχει αυστηρή απόδειξη ότι μια τέτοια λύση είναι αδύνατη. Η οριστική απάντηση δόθηκε μόλις τον 19ο αιώνα, με την ανάπτυξη της σύγχρονης άλγεβρας και της θεωρίας σωμάτων. Το 1837, ο Pierre Wantzel απέδειξε για πρώτη φορά με αυστηρό μαθηματικό τρόπο ότι ο διπλασιασμός του κύβου δεν είναι δυνατός με κανόνα και διαβήτη. Η απόδειξή του βασίστηκε στη μελέτη των κατασκευάσιμων αριθμών και έδειξε ότι η ποσότητα $\sqrt[3]{2}$ δεν μπορεί να παραχθεί μέσω διαδοχικών τετραγωνικών ριζών, όπως απαιτείται στις κλασικές γεωμετρικές κατασκευές (Stillwell, 2010).

Οι αριθμοί που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη προκύπτουν μέσω πεπερασμένου αριθμού πράξεων και διαδοχικών τετραγωνικών ριζών. Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν ανήκει σε αυτή την κατηγορία και επομένως δεν είναι κατασκευάσιμος. Η ίδια εργασία του Wantzel περιλάμβανε και την αυστηρή απόδειξη της αδυναμίας της γενικής τριχοτόμησης της γωνίας με κανόνα και

διαβήτη, κλείνοντας οριστικά δύο από τα τρία μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας. Με τον τρόπο αυτό, ο διπλασιασμός του κύβου μετατράπηκε από ένα πρόβλημα χωρίς γνωστή λύση σε ένα παράδειγμα μαθηματικού ερωτήματος του οποίου η αδυναμία επίλυσης μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά (Sohrab, 2019).

Συνοψίζοντας, ο διπλασιασμός του κύβου δεν αποτελεί αποτυχία της αρχαίας μαθηματικής σκέψης, αλλά αντίθετα αναδεικνύει τη δημιουργική ένταση ανάμεσα στη γεωμετρική αυστηρότητα και τη μαθηματική επινοητικότητα. Αν και το πρόβλημα επιλύθηκε με εναλλακτικά μέσα ήδη από την αρχαιότητα, η αδυναμία του εντός του πλαισίου του κανόνα και του διαβήτη ανέδειξε τα όρια της κλασικής γεωμετρίας και άνοιξε τον δρόμο για τη μετάβαση στη σύγχρονη αλγεβρική θεώρηση των μαθηματικών (Kimuya, 2024).

Η οριστική κατανόηση της αδυναμίας επίλυσης του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη προϋποθέτει τη σύνδεση των γεωμετρικών κατασκευών με την έννοια των αριθμών που αυτές παράγουν. Αν και οι αρχαίοι Έλληνες δεν διέθεταν την έννοια του αριθμού με τη σύγχρονη αλγεβρική σημασία, η γεωμετρική τους πρακτική αντιστοιχούσε, άτυπα αλλά ουσιαστικά, σε συγκεκριμένες αριθμητικές διαδικασίες (Son, 2024). Στη σύγχρονη μαθηματική θεώρηση, έχει αποδειχθεί ότι κάθε κατασκευή που πραγματοποιείται αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη αντιστοιχεί σε αριθμούς οι οποίοι μπορούν να προκύψουν ξεκινώντας από τους ρητούς αριθμούς, με πεπερασμένο πλήθος πράξεων, χρησιμοποιώντας μόνο τις τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις και την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται σήμερα κατασκευάσιμοι αριθμοί (Stewart, 2015).

Η έννοια των κατασκευάσιμων αριθμών προσφέρει μια ακριβή αλγεβρική ερμηνεία των γεωμετρικών περιορισμών που έθεσαν οι αρχαίοι. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη αντιστοιχεί σε έναν τέτοιο αριθμό, ενώ κάθε νέα κατασκευή ισοδυναμεί με τη μετάβαση σε έναν αριθμό που προκύπτει μέσω διαδοχικών τετραγωνικών ριζών. Με άλλα λόγια, η κλασική γεωμετρία επιτρέπει μόνο αριθμούς των οποίων ο αλγεβρικός βαθμός είναι δύναμη του 2 (Stillwell, 2010).

Υπό αυτό το πρίσμα, ένα γεωμετρικό πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη μόνο εφόσον οι αριθμητικές ποσότητες που απαιτεί η λύση του είναι κατασκευάσιμες. Η γεωμετρική δυνατότητα και η αλγεβρική κατασκευασιμότητα αποτελούν, επομένως, δύο όψεις του ίδιου προβλήματος. Στην περίπτωση του διπλασιασμού του κύβου, η γεωμετρική απαίτηση για την κατασκευή κύβου διπλάσιου όγκου οδηγεί αναπόφευκτα στην ανάγκη κατασκευής του αριθμού $\sqrt[3]{2}$ (Baragar, 2002). Ωστόσο, ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να προκύψει από τους

ρητούς μέσω πεπερασμένου πλήθους πράξεων που περιλαμβάνουν μόνο τετραγωνικές ρίζες. Κατά συνέπεια, δεν είναι κατασκευάσιμος και, άρα, δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί σε γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Η ίδια λογική επεκτείνεται και στα υπόλοιπα κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας. Η γενική τριχοτόμηση της γωνίας οδηγεί επίσης σε αριθμητικές ποσότητες που δεν είναι κατασκευάσιμες, ενώ ο τετραγωνισμός του κύκλου απαιτεί την κατασκευή του αριθμού π (Son, 2024).

2.1.2 Η τριχοτόμηση μιας γωνίας

Η τριχοτόμηση μιας γωνίας αποτελεί το τρίτο από τα κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας και αφορά τη διαίρεση μιας δοθείσας γωνίας σε τρία ίσα μέρη, με χρήση αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Σε πρώτη προσέγγιση, το πρόβλημα φαίνεται απλό, ιδίως αν ληφθεί υπόψη ότι η διχοτόμηση μιας γωνίας είναι εφικτή με τα ίδια μέσα και αποτελεί βασική κατασκευή της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η μετάβαση, όμως, από τη διχοτόμηση στην τριχοτόμηση αποδείχθηκε εξαιρετικά πιο σύνθετη (Ben-Ari, 2022).

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ασχολήθηκαν εκτενώς με το πρόβλημα αυτό, θεωρώντας ότι, όπως και στη διχοτόμηση, θα έπρεπε να υπάρχει μια καθαρά γεωμετρική κατασκευή. Πράγματι, για ορισμένες ειδικές γωνίες, όπως η ορθή γωνία ή η γωνία των 90° , η τριχοτόμηση είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη. Η ύπαρξη αυτών των ειδικών περιπτώσεων δημιούργησε την εντύπωση ότι το πρόβλημα είναι γενικά επιλύσιμο, γεγονός που συνέβαλε στη μακροχρόνια ενασχόληση με αυτό (Kimuya, 2017).

Ωστόσο, το κρίσιμο σημείο στην κατανόηση του προβλήματος είναι η διάκριση μεταξύ μερικής και γενικής επιλυσιμότητας. Το ζητούμενο δεν είναι αν υπάρχουν γωνίες που μπορούν να τριχοτομηθούν, αλλά αν κάθε γωνία μπορεί να διαιρεθεί σε τρία ίσα μέρη με τα επιτρεπτά γεωμετρικά εργαλεία. Αν και ορισμένες ειδικές γωνίες μπορούν να τριχοτομηθούν με κανόνα και διαβήτη, δεν υπάρχει γενική μέθοδος που να εφαρμόζεται σε κάθε αυθαίρετη γωνία. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα παρέμεινε ανοιχτή για αιώνες (Rediske, 2018).

Η σύγχρονη ερμηνεία του προβλήματος βασίζεται και εδώ στη σύνδεση γεωμετρικών κατασκευών και κατασκευάσιμων αριθμών. Η τριχοτόμηση μιας γωνίας ισοδυναμεί, σε αλγεβρικό επίπεδο, με την επίλυση εξισώσεων που, στη γενική περίπτωση, είναι κυβικές. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρηθεί γνωστό το συνημίτονο μιας γωνίας, τότε ο υπολογισμός του συνημίτονου του ενός τρίτου της γωνίας οδηγεί σε κυβική εξίσωση. Οι λύσεις τέτοιων εξισώσεων, στη γενική τους μορφή, δεν μπορούν να εκφραστούν μέσω διαδοχικών τετραγωνικών ριζών (Stigler, 2022).

Κατά συνέπεια, οι αριθμητικές ποσότητες που απαιτούνται για τη γενική τριχοτόμηση μιας γωνίας δεν είναι κατασκευάσιμες. Αυτό σημαίνει ότι δεν αντιστοιχούν σε γεωμετρικά μήκη που μπορούν να προκύψουν με κανόνα και διαβήτη. Όπως και στον διπλασιασμό του κύβου, η αδυναμία επίλυσης δεν οφείλεται σε τεχνικούς περιορισμούς ή σε έλλειψη κατάλληλων γεωμετρικών τεχνασμάτων, αλλά σε βαθύτερα αλγεβρικά εμπόδια (Son, 2026).

Η οριστική απόδειξη της αδυναμίας της γενικής τριχοτόμησης της γωνίας δόθηκε τον 19ο αιώνα από τον Pierre Wantzel. Το 1837, ο Wantzel απέδειξε αυστηρά ότι, εκτός από ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, η τριχοτόμηση μιας γωνίας δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη. Η απόδειξή του βασίστηκε στη θεωρία των κατασκευάσιμων αριθμών και έδειξε ότι οι απαραίτητες αριθμητικές ποσότητες έχουν αλγεβρικό βαθμό που δεν είναι δύναμη του 2, γεγονός που τις καθιστά μη κατασκευάσιμες (McCleary, 2024).

Παρά την αδυναμία αυτή, το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας επιλύθηκε με άλλους τρόπους ήδη από την αρχαιότητα. Μαθηματικοί όπως ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησαν μεθόδους νεύσεως ή ειδικές καμπύλες, οι οποίες επιτρέπουν την επίλυση του προβλήματος, αλλά υπερβαίνουν τους περιορισμούς της κλασικής γεωμετρίας. Και αυτές οι λύσεις, αν και μαθηματικά έγκυρες, δεν θεωρήθηκαν αποδεκτές στο πλαίσιο της αυστηρής ευκλείδειας παράδοσης (Richeson, 2019).

Συνολικά, η τριχοτόμηση της γωνίας αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της διάκρισης μεταξύ του «εφικτού» και του «επιτρεπτού» στα μαθηματικά. Το πρόβλημα δεν είναι άλυτο με την απόλυτη έννοια, αλλά άλυτο εντός ενός συγκεκριμένου αξιωματικού και μεθοδολογικού πλαισίου. Η μελέτη του ανέδειξε, με τρόπο ανάλογο με τον διπλασιασμό του κύβου, τα όρια της γεωμετρικής κατασκευής και συνέβαλε καθοριστικά στη μετάβαση προς τη σύγχρονη αλγεβρική κατανόηση των μαθηματικών (Stewart, 2022). Η αντιστοίχιση, λοιπόν, των γεωμετρικών προβλημάτων με τους κατασκευάσιμους αριθμούς επέτρεψε, για πρώτη φορά, την αυστηρή διατύπωση και απόδειξη της αδυναμίας επίλυσής τους. Έτσι, προβλήματα που για αιώνες θεωρούνταν απλώς «δυσκολότατα» μετατράπηκαν σε παραδείγματα μαθηματικών ερωτημάτων των οποίων η αδυναμία λύσης μπορεί να αποδειχθεί με απόλυτη ακρίβεια. Η μετάβαση αυτή σηματοδοτεί και τη βαθύτερη αλλαγή από τη γεωμετρική στη σύγχρονη αλγεβρική θεώρηση των μαθηματικών (Stillwell, 2020).

2.1.3 Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Ο τετραγωνισμός του κύκλου αποτελεί ίσως το πιο διάσημο και μακροχρόνιο από τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: δεδομένου ενός κύκλου, ζητείται η κατασκευή, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου που να έχει

εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Η φαινομενική απλότητα της διατύπωσης απέκρυπτε μια βαθιά μαθηματική δυσκολία, η οποία κράτησε το πρόβλημα στο προσκήνιο για περισσότερους από είκοσι αιώνες (Son, 2024).

Από γεωμετρική άποψη, το ζητούμενο ισοδυναμεί με την κατασκευή ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με $\sqrt{\pi}r$, όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου. Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή του αριθμού $\sqrt{\pi}$.

Αν ένας κύκλος έχει ακτίνα 1, τότε το εμβαδόν του είναι π . Ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού θα πρέπει να έχει πλευρά $\sqrt{\pi}$. Επομένως ο τετραγωνισμός του κύκλου ισοδυναμεί με την κατασκευή του αριθμού $\sqrt{\pi}$.

Για τους αρχαίους Έλληνες, η δυσκολία δεν ήταν εμφανής, καθώς η έννοια του αριθμού π δεν είχε ακόμη αποκτήσει την ακριβή και αφηρημένη σημασία που έχει σήμερα. Παρ' όλα αυτά, η προσπάθεια σύγκρισης καμπύλων και ευθύγραμμων σχημάτων προκάλεσε έντονες φιλοσοφικές και μαθηματικές συζητήσεις ήδη από την εποχή του Αριστοτέλη. Κατά τη διάρκεια της αρχαιότητας αλλά και των επόμενων αιώνων, προτάθηκαν πολυάριθμες απόπειρες επίλυσης του προβλήματος. Ορισμένοι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν ειδικές καμπύλες, όπως η τετραγωνίστρια, ενώ άλλοι προσέγγισαν το εμβαδόν του κύκλου με αριθμητικές μεθόδους προσέγγισης. Αν και τέτοιες προσεγγίσεις μπορούσαν να δώσουν πολύ καλές προσεγγιστικές λύσεις, δεν θεωρήθηκαν αποδεκτές, καθώς παραβίαζαν τον θεμελιώδη περιορισμό της χρήσης μόνο κανόνα και διαβήτη (Kupczynski, 2024).

Όπως και στα άλλα δύο κλασικά προβλήματα, η ουσιαστική κατανόηση της αδυναμίας επίλυσης του τετραγωνισμού του κύκλου προέκυψε πολύ αργότερα, όταν η γεωμετρική διατύπωση συνδέθηκε με την αλγεβρική έννοια των κατασκευάσιμων αριθμών. Ένα γεωμετρικό πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη μόνο εφόσον οι αριθμητικές ποσότητες που απαιτεί η λύση του είναι κατασκευάσιμες. Στην περίπτωση του τετραγωνισμού του κύκλου, αυτό θα προϋπέθετε την κατασκευασιμότητα του αριθμού π (Haug, 2023).

Η καθοριστική εξέλιξη ήρθε το 1882, όταν ο Ferdinand von Lindemann απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα καμίας αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Ένας υπερβατικός αριθμός δεν είναι ρίζα καμίας μη μηδενικής πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Το αποτέλεσμα αυτό είχε άμεση και οριστική συνέπεια: οι υπερβατικοί αριθμοί δεν είναι κατασκευάσιμοι, και επομένως δεν μπορούν να προκύψουν από γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Έτσι, αποδείχθηκε αυστηρά ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος εντός του κλασικού γεωμετρικού πλαισίου (Agarwal, 2021).

Παρά την αδυναμία αυτή, το πρόβλημα δεν έπαψε να έχει μαθηματικό ενδιαφέρον. Αντιθέτως, η μακρόχρονη προσπάθεια επίλυσής του συνέβαλε ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ανάλυσης, της θεωρίας αριθμών και της έννοιας των υπερβατικών αριθμών. Όπως και στα άλλα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, ο τετραγωνισμός του κύκλου δεν απέτυχε· ανέδειξε τα όρια της κλασικής γεωμετρίας και λειτούργησε ως αφετηρία για τη διαμόρφωση νέων μαθηματικών εργαλείων. Συνολικά, ο τετραγωνισμός του κύκλου αποτελεί εμβληματικό παράδειγμα προβλήματος που μετασχηματίστηκε από γεωμετρική πρόκληση σε θεμελιώδες επιστημολογικό ζήτημα. Η οριστική απόδειξη της αδυναμίας του δεν έκλεισε απλώς ένα αρχαίο ερώτημα, αλλά σηματοδότησε τη μετάβαση από τη γεωμετρική στη σύγχρονη αλγεβρική θεώρηση των μαθηματικών, ολοκληρώνοντας τον κύκλο των τριών μεγάλων προβλημάτων της αρχαιότητας (Ferreirós, 2010).

2.1.4 Σύνοψη

Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας – η τριχοτόμηση μιας αυθαίρετης γωνίας, ο διπλασιασμός του κύβου και ο τετραγωνισμός του κύκλου – κατέχουν ξεχωριστή θέση στην ιστορία των Μαθηματικών. Για περισσότερους από δύο χιλιάδες χρόνια απασχόλησαν τους σημαντικότερους μαθηματικούς της ανθρωπότητας, αποτελώντας πηγή έμπνευσης, δημιουργικότητας και επιστημονικής αναζήτησης. Παρότι διατυπώθηκαν με απλό και κατανοητό τρόπο, αποδείχθηκαν εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα, καθώς η επίλυσή τους έπρεπε να πραγματοποιηθεί αποκλειστικά με τα κλασικά εργαλεία της ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή τον κανόνα και τον διαβήτη. Η μελέτη των τριών αυτών προβλημάτων αναδεικνύει με εντυπωσιακό τρόπο τη δύναμη αλλά και τα όρια της μαθηματικής σκέψης. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, αξιοποιώντας τη λογική, τη γεωμετρική διαίσθηση και την αυστηρή απόδειξη, κατόρθωσαν να αναπτύξουν μεθόδους και θεωρίες που επηρέασαν βαθιά την εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών. Παρά τις πολυάριθμες προσπάθειες που καταβλήθηκαν, κανένα από τα τρία προβλήματα δεν κατέστη δυνατό να επιλυθεί με τα επιτρεπόμενα εργαλεία. Ωστόσο, η αποτυχία αυτή δεν πρέπει να θεωρηθεί ως αδυναμία της αρχαίας μαθηματικής σκέψης. Αντίθετα, αποτέλεσε την αφετηρία για τη γέννηση νέων ιδεών και τη διαμόρφωση νέων μαθηματικών κλάδων.

Η τριχοτόμηση της γωνίας οδήγησε στη βαθύτερη κατανόηση των αλγεβρικών εξισώσεων και των γεωμετρικών κατασκευών. Ο διπλασιασμός του κύβου συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των αναλογιών, των κωνικών τομών και της μελέτης των κυβικών εξισώσεων. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, με τη σειρά του, συνδέθηκε άμεσα με τη φύση του αριθμού π και αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα κίνητρα για τη μελέτη των υπερβατικών αριθμών. Έτσι,

προβλήματα που αρχικά ανήκαν αποκλειστικά στον χώρο της γεωμετρίας κατέληξαν να επηρεάσουν καθοριστικά την άλγεβρα, τη θεωρία αριθμών και τα θεμέλια των σύγχρονων μαθηματικών.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι η οριστική απάντηση στα τρία προβλήματα δεν προήλθε από την ανακάλυψη μιας νέας γεωμετρικής κατασκευής, αλλά από την απόδειξη της αδυναμίας τους. Κατά τον 19ο αιώνα, οι εργασίες των Pierre Wantzel και Ferdinand von Lindemann έδειξαν ότι οι περιορισμοί του κανόνα και του διαβήτη δεν επιτρέπουν την επίλυση των προβλημάτων αυτών. Οι αποδείξεις αυτές αποτέλεσαν ιστορικό ορόσημο, καθώς μετέφεραν το ενδιαφέρον από την αναζήτηση μιας κατασκευής στη διερεύνηση των θεωρητικών ορίων των μαθηματικών μεθόδων. Με τον τρόπο αυτό αναδείχθηκε μια βαθύτερη διάσταση της μαθηματικής επιστήμης: εξίσου σημαντική με την εύρεση μιας λύσης είναι και η απόδειξη ότι μια λύση δεν μπορεί να υπάρξει υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις (Alex, 2024).

Συνοψίζοντας, τα τρία μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας αποτελούν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της αδιάκοπης προσπάθειας του ανθρώπου να κατανοήσει τον κόσμο μέσω της λογικής και της μαθηματικής σκέψης. Αν και η τελική απάντηση υπήρξε αρνητική ως προς τη δυνατότητα κατασκευής τους με κανόνα και διαβήτη, η διαδρομή προς αυτήν την απάντηση υπήρξε εξαιρετικά γόνιμη (Morris, et al., 2022). Οι αναζητήσεις, οι αποτυχίες, οι νέες ιδέες και οι θεωρητικές ανακαλύψεις που προέκυψαν κατά τη διάρκεια αυτής της πορείας συνέβαλαν καθοριστικά στη διαμόρφωση των σύγχρονων μαθηματικών. Για τον λόγο αυτό, η τριχοτόμηση της γωνίας, ο διπλασιασμός του κύβου και ο τετραγωνισμός του κύκλου δεν αποτελούν απλώς ιστορικά προβλήματα της αρχαιότητας, αλλά διαχρονικά σύμβολα της μαθηματικής δημιουργίας, της επιστημονικής περιέργειας και της ανθρώπινης αναζήτησης της γνώσης (Richeson, 2019).

2.2 Από τον Μεσαίωνα στη νεότερη εποχή: η ανάδυση νέων άλυτων προβλημάτων

Μετά τον Μεσαίωνα, τα μαθηματικά εισέρχονται σταδιακά σε μια νέα εποχή, η οποία χαρακτηρίζεται από τη διεύρυνση των μεθόδων, την εισαγωγή του συμβολισμού και τη στενότερη σύνδεση της θεωρίας με προβλήματα της φύσης. Η Αναγέννηση και οι αιώνες που ακολούθησαν δεν κληρονόμησαν απλώς τα προβλήματα της αρχαιότητας, αλλά ανέδειξαν νέα είδη άλυτων προβλημάτων, τα οποία δεν αφορούσαν πλέον μόνο γεωμετρικές κατασκευές, αλλά βαθύτερες δομές των αριθμών, των συναρτήσεων και των μαθηματικών νόμων (Netz, 2004).

Ένα από τα πιο εμβληματικά παραδείγματα αυτής της περιόδου είναι το λεγόμενο *Τελευταίο Θεώρημα του Fermat*. Ο Pierre de Fermat διατύπωσε τον 17ο αιώνα τον ισχυρισμό ότι η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις για $n > 2$.

Παρότι το θεώρημα έχει απλή διατύπωση, η απόδειξή του αντιστάθηκε σε όλες τις προσπάθειες επί περισσότερα από 350 χρόνια. Η μακρόχρονη αυτή αναζήτηση οδήγησε στην ανάπτυξη νέων κλάδων, όπως η αλγεβρική θεωρία αριθμών, και τελικά στην απόδειξη από τον Andrew Wiles το 1994, χρησιμοποιώντας εργαλεία που ήταν αδιανόητα στην εποχή του Fermat (Porras, 2016).

Παράλληλα, κατά τον 17ο και 18ο αιώνα, μαθηματικοί όπως οι Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz θεμελίωσαν τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, ανοίγοντας ένα νέο πεδίο άλυτων προβλημάτων που σχετίζονταν με τη φύση της κίνησης, της μεταβολής και της απειροστικής διαδικασίας. Πολλά από αυτά τα προβλήματα δεν ήταν άλυτα με την έννοια της αδυναμίας, αλλά απαιτούσαν τη δημιουργία εντελώς νέων εννοιών και μεθόδων για να διατυπωθούν και να αντιμετωπιστούν (Bair et al. 2017).

Κατά τον 18ο και 19ο αιώνα, τα μαθηματικά γνωρίζουν μια περίοδο εντυπωσιακής ανάπτυξης, με κεντρικές μορφές τον Leonhard Euler και τον Carl Friedrich Gauss, δύο μαθηματικούς που άσκησαν τεράστια επιρροή σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης. Παρά το γεγονός ότι συνδέθηκαν με τη λύση πλήθους σημαντικών προβλημάτων, το έργο τους ανέδειξε ταυτόχρονα και βαθιές δυσκολίες, οι οποίες δεν μπορούσαν να ξεπεραστούν με τα διαθέσιμα θεωρητικά εργαλεία της εποχής τους. Τα προβλήματα αυτά δεν έμειναν ως αποτυχίες, αλλά λειτούργησαν ως σημεία καμπής που καθόρισαν τη μελλοντική πορεία της μαθηματικής έρευνας (Esteve, 2025).

Ο Euler, με τη μοναδική του ικανότητα να χειρίζεται απειροστικές διαδικασίες, ανέδειξε κρίσιμα ζητήματα στη θεωρία αριθμών και στην ανάλυση. Η μελέτη του για τους πρώτους αριθμούς και η ανακάλυψη της βαθιάς σύνδεσης μεταξύ άπειρων σειρών και γινομένων πάνω στους πρώτους αποκάλυψε μια εσωτερική δομή των φυσικών αριθμών, χωρίς ωστόσο να δίνει απάντηση στο θεμελιώδες ερώτημα της κατανομής τους. Το πρόβλημα αυτό παρέμεινε ανοιχτό και οδήγησε αργότερα στη διατύπωση της Υπόθεσης Riemann, ενός από τα πιο σημαντικά άλυτα προβλήματα των μαθηματικών (Karatsuba, 2009). Παράλληλα, ο Euler εργάστηκε εκτενώς με απειροστικές σειρές, πολλές φορές χωρίς τη σύγχρονη έννοια της αυστηρής σύγκλισης. Αν και τα αποτελέσματά του ήταν συχνά εντυπωσιακά και σωστά, η μεθοδολογία του ανέδειξε την ανάγκη για αυστηρή θεμελίωση της ανάλυσης, η οποία θα πραγματοποιηθεί μόνο αργότερα, τον 19ο αιώνα, με το έργο των Cauchy και Weierstrass. Ακόμη και επιτυχίες του Euler, όπως η επίλυση του προβλήματος του Basel, άνοιξαν νέα ερωτήματα σχετικά με τη

σχέση των άπειρων διαδικασιών με θεμελιώδεις μαθηματικές σταθερές, ερωτήματα που δεν μπορούσαν τότε να απαντηθούν πλήρως (Ferraro, 2012).

Αντίστοιχα, ο Gauss, ο οποίος συχνά χαρακτηρίζεται ως «πρίγκιπας των μαθηματικών», έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας αριθμών, χωρίς ωστόσο να κλείσει όλα τα ερωτήματα που ο ίδιος ανέδειξε. Ήδη από νεαρή ηλικία είχε παρατηρήσει έναν νόμο που περιγράφει προσεγγιστικά την κατανομή των πρώτων αριθμών, όμως δεν μπόρεσε να αποδείξει αυστηρά το αποτέλεσμα, το οποίο θα καθιερωθεί πολύ αργότερα ως Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών (Burger, 2004). Η πλήρης κατανόηση της συμπεριφοράς των πρώτων αριθμών παρέμεινε και παραμένει μέχρι σήμερα στενά συνδεδεμένη με ανοιχτά προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Παράλληλα, αν και ο Gauss απέδειξε τον νόμο της τετραγωνικής αμοιβαιότητας, η προσπάθεια γενίκευσής του σε ανώτερες δυνάμεις αποκάλυψε δυσκολίες που οδήγησαν στη γέννηση της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών, χωρίς να υπάρξει άμεση και πλήρης λύση στα ερωτήματα που τέθηκαν (Gargote, et al., 2026).

Ιδιαίτερη σημασία έχει επίσης η στάση του Gauss απέναντι στη μη ευκλείδεια γεωμετρία. Αν και είχε αντιληφθεί τη δυνατότητα ύπαρξης γεωμετριών διαφορετικών από την ευκλείδεια, δίστασε να δημοσιεύσει τα αποτελέσματά του, θεωρώντας ότι οι ιδέες αυτές θα συναντούσαν έντονη αντίδραση. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι ακόμη και οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί της εποχής βρέθηκαν αντιμέτωποι όχι μόνο με τεχνικές δυσκολίες, αλλά και με βαθύτερα επιστημολογικά εμπόδια (Dart, 2015).

Η περίπτωση των Euler και Gauss αναδεικνύει με σαφήνεια ότι τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν απλώς αποτυχίες της μαθηματικής προσπάθειας, αλλά φυσική συνέπεια της προόδου της γνώσης. Μέσα από το έργο τους, τα μαθηματικά διευρύνθηκαν, αλλά ταυτόχρονα αποκαλύφθηκαν νέα όρια, τα οποία απαιτούσαν νέες έννοιες, νέα εργαλεία και νέα ερευνητικά προγράμματα. Τα ερωτήματα που άφησαν ανοιχτά οι δύο αυτοί κορυφαίοι μαθηματικοί λειτούργησαν ως γέφυρες προς τη σύγχρονη ανάλυση, τη θεωρία αριθμών και, τελικά, προς τη συνειδητή διατύπωση των μεγάλων άλυτων προβλημάτων, όπως αυτή θα εκφραστεί συμβολικά με τη λίστα του Hilbert στο τέλος του 19ου αιώνα (Movshovitz-Hadar & Kleiner, Israel, 2009).

Η συστηματική κατηγοριοποίηση των μεγάλων μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί σχετικά πρόσφατο φαινόμενο στην ιστορία των μαθηματικών. Για αιώνες, τα προβλήματα αναδύονταν αποσπασματικά, μέσα από το έργο μεμονωμένων μαθηματικών ή συγκεκριμένων επιστημονικών αναγκών, χωρίς να υπάρχει μια οργανωμένη προσπάθεια χαρτογράφησης της μελλοντικής πορείας της επιστήμης. Η πρώτη συνειδητή και οργανωμένη απόπειρα διατύπωσης ενός τέτοιου «οδικού χάρτη» πραγματοποιήθηκε το 1900 από τον David Hilbert,

ο οποίος στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι παρουσίασε τη γνωστή λίστα με τα 23 προβλήματα (Boucard, & Morel, 2022).

Τα προβλήματα του Hilbert δεν αποτέλεσαν απλώς μια συλλογή δύσκολων ερωτημάτων, αλλά εξέφρασαν μια συγκεκριμένη φιλοσοφία για τα μαθηματικά. Ο Hilbert πίστευε ότι κάθε καλά διατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα είναι κατ' αρχήν επιλύσιμο και ότι η συστηματική διατύπωση των κεντρικών ανοιχτών ερωτημάτων θα καθοδηγούσε την έρευνα του 20ού αιώνα. Πράγματι, τα περισσότερα από τα προβλήματα αυτά είτε επιλύθηκαν είτε οδήγησαν στη δημιουργία νέων κλάδων, ενώ ορισμένα αποκάλυψαν τα όρια της αποδείξιμης γνώσης, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς (Stoeltzner, 2015).

Μετά τον Hilbert, δεν εμφανίστηκε αμέσως μια αντίστοιχη ενιαία λίστα παγκόσμιας εμβέλειας. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, άρχισαν να διατυπώνονται θεματικές λίστες προβλημάτων, επικεντρωμένες σε επιμέρους κλάδους των μαθηματικών. Σε περιοχές όπως η θεωρία αριθμών, η τοπολογία, η ανάλυση και τα δυναμικά συστήματα, κορυφαίοι μαθηματικοί διατύπωσαν προβλήματα που καθόρισαν την έρευνα για δεκαετίες, χωρίς όμως να συγκροτούν έναν ενιαίο «κατάλογο» με τη φιλοσοφική φιλοδοξία του Hilbert (Hazewinkel, 1990).

Μια δεύτερη, συνειδητή απόπειρα χαρτογράφησης των μεγάλων ανοιχτών προβλημάτων έγινε στο τέλος του 20ού αιώνα, με πρωτοβουλία του Clay Mathematics Institute. Το 2000 ανακοινώθηκε η λίστα των Millennium Prize Problems, η οποία περιλαμβάνει επτά θεμελιώδη προβλήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Σε αντίθεση με τη λίστα του Hilbert, η λίστα αυτή είναι περιορισμένη σε αριθμό, αλλά συνοδεύεται από ισχυρό συμβολικό και κοινωνικό φορτίο, καθώς η επίλυση κάθε προβλήματος συνοδεύεται από χρηματικό βραβείο. Η επιλογή των προβλημάτων αποσκοπούσε στο να αναδειχθούν ζητήματα που βρίσκονται στον πυρήνα της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας και συνδέονται συχνά με τα θεμέλια της επιστήμης (Devlin, 2003).

Παράλληλα με τη λίστα των Millennium Problems, έχουν διατυπωθεί και άλλες σημαντικές συλλογές προβλημάτων με πιο εξειδικευμένο χαρακτήρα. Ιδιαίτερη μνεία αξίζει στη λίστα των 18 προβλημάτων του Smale, που παρουσιάστηκε το 1998 από τον Stephen Smale. Τα προβλήματα αυτά επικεντρώνονται κυρίως στη δυναμική συστημάτων, τη γεωμετρία και την υπολογιστική πολυπλοκότητα, και αντικατοπτρίζουν τις ανησυχίες της μαθηματικής έρευνας στο τέλος του 20ού αιώνα. Η φιλοσοφία του Smale διαφέρει από εκείνη του Hilbert, καθώς δίνεται έμφαση όχι μόνο στη θεωρητική επίλυση, αλλά και στη σχέση των μαθηματικών με τον υπολογισμό και την εφαρμογή (Vega, 2024).

Επιπλέον, σε επιμέρους περιοχές έχουν διαμορφωθεί άτυπες αλλά ευρέως αναγνωρισμένες λίστες ανοιχτών προβλημάτων, όπως στη θεωρία αριθμών, στην αλγεβρική γεωμετρία ή στη θεωρία υπολογισμού. Αν και οι λίστες αυτές δεν έχουν την ιστορική βαρύτητα των προβλημάτων του Hilbert ή των Millennium Problems, παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των ερευνητικών κατευθύνσεων και στην εκπαίδευση νέων μαθηματικών (Chatterjee, 2021).

Από επιστημολογική και διδακτική άποψη, η ύπαρξη τέτοιων λιστών αναδεικνύει μια σημαντική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας: τα μαθηματικά δεν εξελίσσονται τυχαία, αλλά μέσα από συνειδητές προσπάθειες ιεράρχησης των ερωτημάτων που θεωρούνται θεμελιώδη. Οι λίστες προβλημάτων λειτουργούν ως καθρέφτης της εποχής τους, αποκαλύπτοντας τόσο τις δυνατότητες όσο και τα όρια της μαθηματικής γνώσης σε κάθε ιστορική στιγμή.

Στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών, η μετάβαση από τα 23 προβλήματα του Hilbert στις σύγχρονες λίστες ανοιχτών προβλημάτων μπορεί να αναδείξει στους μαθητές/μαθήτριες ότι η επιστήμη αυτή είναι ζωντανή και εξελισσόμενη. Τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν ένδειξη αποτυχίας, αλλά κινητήρια δύναμη της προόδου, καθώς καθορίζουν τους άξονες γύρω από τους οποίους αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη.

Ο David Hilbert λοιπόν ανέλαβε έναν πρωτοφανή ρόλο. Στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, δεν παρουσίασε απλώς αποτελέσματα, αλλά διατύπωσε έναν συνειδητό οδικό χάρτη για τη μελλοντική πορεία των μαθηματικών, μέσω μιας λίστας 23 ανοικτών προβλημάτων.

Ο David Hilbert αποτελεί μία από τις πιο καθοριστικές μορφές των μαθηματικών του τέλους του 19ου και των αρχών του 20ού αιώνα. Το έργο του εκτείνεται σε πλήθος περιοχών, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση, η γεωμετρία και τα θεμέλια των μαθηματικών, ενώ χαρακτηρίζεται από βαθιά πίστη στη δύναμη της ανθρώπινης λογικής και της αυστηρής μαθηματικής σκέψης. Σε μια εποχή κατά την οποία τα μαθηματικά είχαν αναπτυχθεί ραγδαία αλλά συχνά αποσπασματικά, ο Hilbert διέκρινε την ανάγκη για έναν συνολικό προσανατολισμό της έρευνας. (Reid, 1996).

Η σκέψη του Hilbert επηρεάστηκε έντονα από τη διαπίστωση ότι τα μεγάλα άλυτα προβλήματα της ιστορίας δεν αποτέλεσαν εμπόδια, αλλά αφετηρίες προόδου. Από τα τρία προβλήματα της αρχαιότητας έως τα ερωτήματα της θεωρίας αριθμών και της ανάλυσης στον 19ο αιώνα, τα μαθηματικά εξελίχθηκαν ακριβώς επειδή υπήρχαν σαφώς διατυπωμένα ερωτήματα που αντιστέκονταν στη λύση. Ο Hilbert πίστευε ότι η πρόοδος της επιστήμης

απαιτεί όχι μόνο νέες τεχνικές, αλλά και καλά διατυπωμένα προβλήματα, τα οποία λειτουργούν ως οδηγοί της έρευνας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, ο Hilbert δεν παρουσίασε μια ανασκόπηση του παρελθόντος, αλλά μια τολμηρή πρόταση για το μέλλον. Διατύπωσε έναν κατάλογο 23 ανοικτών προβλημάτων, τα οποία, κατά τη γνώμη του, αποτύπωναν τις σημαντικότερες προκλήσεις της εποχής και μπορούσαν να καθορίσουν την πορεία των μαθηματικών στον νέο αιώνα. Με την πράξη αυτή, τα άλυτα προβλήματα απέκτησαν για πρώτη φορά έναν συνειδητό, προγραμματικό ρόλο (Nash & Rassias, 2016).

Η απόφαση του Hilbert να συγκεντρώσει και να παρουσιάσει αυτά τα προβλήματα δεν ήταν τυχαία. Αντανακλούσε την πεποίθησή του ότι τα άλυτα προβλήματα αποτελούν τον κινητήριο μοχλό της επιστημονικής προόδου, η σαφής διατύπωσή τους είναι εξίσου σημαντική με τη λύση τους, και ότι η μαθηματική έρευνα χρειάζεται προσανατολισμό, όχι μόνο συσσώρευση αποτελεσμάτων. Τα 23 προβλήματα του Hilbert κάλυπταν ένα ευρύ φάσμα περιοχών: θεωρία αριθμών, ανάλυση, γεωμετρία, θεμέλια των μαθηματικών και μαθηματική φυσική. Ορισμένα από αυτά λύθηκαν μέσα στον 20ό αιώνα, άλλα οδήγησαν στη δημιουργία νέων κλάδων, ενώ μερικά παραμένουν ακόμη ανοιχτά. Το σημαντικότερο, όμως, είναι ότι με τη λίστα αυτή τα άλυτα προβλήματα απέκτησαν θεσμικό ρόλο: από μεμονωμένες προκλήσεις μετατράπηκαν σε συλλογικό πρόγραμμα έρευνας (Kahle & Oitavem, 2018).

Με τον τρόπο αυτό, ο Hilbert ολοκλήρωσε μια ιστορική μετάβαση που ξεκίνησε στην αρχαιότητα. Ενώ τα τρία κλασικά προβλήματα ανέδειξαν τα όρια της γεωμετρικής μεθόδου, τα προβλήματα του Hilbert ανέδειξαν τα όρια και τις δυνατότητες ολόκληρου του μαθηματικού οικοδομήματος. Από εκείνο το σημείο και έπειτα, τα άλυτα προβλήματα δεν θεωρούνται πλέον αδιέξοδα, αλλά πυξίδες που δείχνουν προς τα επόμενα σύνορα της γνώσης.

Τα 23 προβλήματα του Hilbert καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα περιοχών και αντικατοπτρίζουν την πολυπλοκότητα και τον πλούτο των μαθηματικών στο γύρισμα του αιώνα. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα που έθεσε είναι τα εξής:

- Η υπόθεση του συνεχούς και η πληθικότητα των συνόλων
- Η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής
- Η ισότητα όγκων πολυέδρων με ίσο εμβαδόν βάσης και ύψος
- Το πρόβλημα των ευθειών ως γεωδαισιακών
- Η αναλυτική φύση των ομάδων μετασχηματισμών
- Τα αξιώματα της φυσικής και η μαθηματική τους θεμελίωση
- Η υπερβατικότητα ορισμένων αριθμών

- Η υπόθεση Riemann
- Ο νόμος της αμοιβαιότητας στη θεωρία αριθμών
- Η επιλυσιμότητα διοφαντικών εξισώσεων
- Η αναπαράσταση τετραγωνικών μορφών
- Η επέκταση των θεωριών του Kronecker
- Η επίλυση εξισώσεων με συνεχή συναρτησιακή εξάρτηση
- Η περατότητα συστημάτων εξισώσεων και ανισώσεων
- Η αυστηρή θεμελίωση του λογισμού των μεταβολών
- Το πρόβλημα των ορίων των αλγεβρικών καμπυλών
- Η αναπαράσταση θετικών συναρτήσεων
- Το πρόβλημα της πλήρωσης του χώρου
- Η κανονικότητα λύσεων διαφορικών εξισώσεων
- Το πρόβλημα των γενικών συνοριακών τιμών
- Η επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων
- Η ομοιομορφία των αναλυτικών σχέσεων
- Η περαιτέρω ανάπτυξη του λογισμού των συναρτήσεων

Από τα 23 προβλήματα του Hilbert, ένα σημαντικό μέρος έχει πλέον λυθεί ή θεωρείται ουσιαστικά επιλυμένο, συχνά μέσα από νέες θεωρίες που δεν υπήρχαν το 1900. Άλλα προβλήματα οδήγησαν σε αρνητικές απαντήσεις ή αποδείχθηκαν ανεξάρτητα από τα καθιερωμένα αξιώματα, ενώ ορισμένα, όπως η Υπόθεση Riemann, παραμένουν έως σήμερα κεντρικά ανοικτά ερωτήματα. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει τη διορατικότητα του Hilbert και τον ρόλο των άλυτων προβλημάτων ως κινητήριων δυνάμεων της μαθηματικής εξέλιξης (Kouneiher, 2019).

Ανεξάρτητα από το αν τα προβλήματα αυτά λύθηκαν, αναδιατυπώθηκαν ή παρέμειναν ανοιχτά, η σημασία τους υπήρξε τεράστια. Πολλά από αυτά οδήγησαν στη δημιουργία νέων κλάδων, άλλα αποδείχθηκαν αδύνατα ή ανεξάρτητα από τα αξιώματα, ενώ ορισμένα εξακολουθούν να αποτελούν κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα. Το ουσιώδες, όμως, είναι ότι με τη λίστα αυτή ο Hilbert μετέτρεψε τα άλυτα προβλήματα από μεμονωμένες ιστορικές προκλήσεις σε συλλογικό επιστημονικό πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό, ο Hilbert ολοκλήρωσε μια ιστορική πορεία που ξεκίνησε στην αρχαιότητα. Τα άλυτα προβλήματα δεν αντιμετωπίζονται πλέον ως αδιέξοδα, αλλά ως απαραίτητα σημεία αναφοράς για την εξέλιξη της γνώσης. Η παρέμβασή του στο Παρίσι το 1900 σηματοδοτεί τη μετάβαση στη σύγχρονη

εποχή των μαθηματικών, ανοίγοντας τον δρόμο για τις μεγάλες προκλήσεις του 20ού και του 21ου αιώνα (Bodner, 2025).

Αν και η λίστα των 23 προβλημάτων του Hilbert αποτέλεσε ορόσημο για τη μαθηματική έρευνα του 20ού αιώνα, δεν εξαντλεί το σύνολο των μεγάλων άλυτων προβλημάτων που ανέδειξε η ιστορία των μαθηματικών. Πριν και μετά το 1900, διατυπώθηκαν ερωτήματα εξαιρετικής σημασίας, τα οποία είτε δεν συμπεριλήφθηκαν συνειδητά στη λίστα του Hilbert είτε εμφανίστηκαν χρονολογικά αργότερα. Τα προβλήματα αυτά απέκτησαν διαχρονική φήμη, κινητοποίησαν ολόκληρους κλάδους της επιστήμης και σε πολλές περιπτώσεις λειτούργησαν ως καταλύτες για τη δημιουργία νέων θεωριών.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, το οποίο, παρότι διατυπώθηκε ήδη από τον 17ο αιώνα, δεν περιλήφθηκε στα προβλήματα του Hilbert. Η απουσία του δεν μειώνει τη σημασία του· αντίθετα, η πολυαιώνια προσπάθεια απόδειξής του οδήγησε στη γέννηση και την εμβάθυνση της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών, των ελλειπτικών καμπυλών και της θεωρίας modular μορφών. Η τελική του απόδειξη στα τέλη του 20ού αιώνα επιβεβαίωσε ότι ένα μεμονωμένο πρόβλημα μπορεί να διαμορφώσει την πορεία της μαθηματικής έρευνας για αιώνες, ακόμη κι αν δεν εντάσσεται σε κάποιο επίσημο «ερευνητικό πρόγραμμα».

Αντίστοιχα, η Εικασία του Poincaré, η οποία διατυπώθηκε λίγα χρόνια μετά το συνέδριο του Παρισιού, δεν θα μπορούσε να περιληφθεί στη λίστα του Hilbert για καθαρά χρονολογικούς λόγους. Ωστόσο, η σημασία της για την τοπολογία και τη γεωμετρία είναι τέτοια, ώστε συχνά θεωρείται ισάξια με τα σημαντικότερα προβλήματα του 20ού αιώνα. Η μακρόχρονη αδυναμία επίλυσής της και η τελική απόδειξή της στις αρχές του 21ου αιώνα ανέδειξαν τη βαθιά σχέση μεταξύ γεωμετρικών ροών, τοπολογίας και αναλυτικών μεθόδων (Gray, 2012).

Ένα ακόμη εμβληματικό παράδειγμα είναι η Εικασία του Goldbach, η οποία αφορά την αναπαράσταση των άρτιων ακεραίων ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Παρά την απλή διατύπωσή της, παραμένει μέχρι σήμερα άλυτη στη γενική της μορφή. Η εικασία αυτή δεν περιλαμβανόταν στα προβλήματα του Hilbert, αν και σχετίζεται έμμεσα με το 8ο πρόβλημα και τη γενικότερη μελέτη της κατανομής των πρώτων αριθμών. Η δημοφιλία και η ανθεκτικότητά της την καθιστούν ένα από τα πιο γνωστά άλυτα προβλήματα παγκοσμίως (Honwei et al., 2019).

Πέρα από αυτά, υπάρχουν και άλλα προβλήματα ανάλογης φήμης, τα οποία δεν εντάσσονται στη λίστα του Hilbert, όπως η Εικασία Collatz, το πρόβλημα των τέλειων αριθμών, η Εικασία των διδύμων πρώτων, καθώς και σύγχρονα προβλήματα της

υπολογιστικής πολυπλοκότητας και της μαθηματικής φυσικής. Κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών είναι ότι δεν αποτελούν απλώς τεχνικά ερωτήματα, αλλά αγγίζουν θεμελιώδεις δομές των μαθηματικών (Dickson, 2005).

Η ύπαρξη αυτών των προβλημάτων δείχνει ότι η λίστα του Hilbert, όσο καθοριστική κι αν υπήρξε, δεν αποτελεί έναν πλήρη κατάλογο των μεγάλων μαθηματικών προκλήσεων. Αντίθετα, τα άλυτα προβλήματα εμφανίζονται σε κάθε εποχή, συχνά απρόβλεπτα, και αντικατοπτρίζουν τις βαθύτερες ανάγκες και τα όρια της εκάστοτε μαθηματικής γνώσης. Με αυτή την έννοια, η ιστορία των άλυτων προβλημάτων δεν είναι μια κλειστή αφήγηση, αλλά μια ανοιχτή και δυναμική διαδικασία, που συνεχίζεται έως σήμερα.

Στο τέλος του 20ού αιώνα, έναν αιώνα μετά τη διατύπωση των 23 προβλημάτων του Hilbert, έγινε μια νέα, συνειδητή προσπάθεια ανάδειξης των σημαντικότερων ανοιχτών προβλημάτων των μαθηματικών. Η προσπάθεια αυτή εκφράστηκε μέσα από τη δημιουργία των Millennium Prize Problems, τα οποία ανακοινώθηκαν το έτος 2000 από το Clay Mathematics Institute. Η χρονική συγκυρία δεν ήταν τυχαία, καθώς συνέπιπτε με την είσοδο της ανθρωπότητας στη νέα χιλιετία και στόχευε να αποτυπώσει τις θεμελιώδεις προκλήσεις της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας (Hosch, 2026).

Η φιλοσοφία των Millennium Prize Problems παρουσιάζει σαφείς ομοιότητες με εκείνη του Hilbert, αλλά και σημαντικές διαφορές. Όπως και τα προβλήματα του 1900, έτσι και τα προβλήματα του 2000 επιλέχθηκαν ώστε να καλύπτουν διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών και να αγγίζουν ζητήματα θεμελιώδους σημασίας. Ωστόσο, η λίστα των Millennium Problems είναι σαφώς πιο περιορισμένη αριθμητικά, καθώς περιλαμβάνει μόνο επτά προβλήματα, τα οποία θεωρούνται αντιπροσωπευτικά των βαθύτερων ανοιχτών ερωτημάτων της εποχής μας.

Τα επτά Millennium Prize Problems είναι τα εξής: η Υπόθεση του Συνεχούς Ρήμαν, η Εικασία του Hodge, το πρόβλημα P έναντι NP, οι εξισώσεις Navier–Stokes ως προς την ύπαρξη και ομαλότητα λύσεων, η εικασία Birch και Swinnerton-Dyer, η εικασία Yang–Mills και το κενό μάζας, καθώς και η Εικασία του Poincaré. Τα προβλήματα αυτά εκτείνονται από τη θεωρία αριθμών και τη γεωμετρία έως τη μαθηματική φυσική και τη θεωρία υπολογισμού, αποτυπώνοντας τον διεπιστημονικό χαρακτήρα των σύγχρονων μαθηματικών (Mallick et al., 2016).

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της λίστας είναι ότι κάθε πρόβλημα συνοδεύεται από χρηματικό έπαθλο ενός εκατομμυρίου δολαρίων, το οποίο απονέμεται σε όποιον παρουσιάσει πλήρη και αποδεκτή απόδειξη. Το στοιχείο αυτό δεν αποσκοπεί απλώς στην οικονομική επιβράβευση, αλλά λειτουργεί κυρίως συμβολικά, αναδεικνύοντας τη σημασία της μαθηματικής έρευνας στο

ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο και προβάλλοντας τα μαθηματικά ως ζωντανή και ενεργή επιστήμη.

Μέχρι σήμερα, από τα επτά Millennium Prize Problems έχει επιλυθεί πλήρως μόνο η Εικασία του Poincaré, με την απόδειξη του Grigori Perelman στις αρχές του 21ου αιώνα. Η άρνηση του Perelman να αποδεχθεί τόσο το χρηματικό βραβείο όσο και τη δημόσια αναγνώριση προσέδωσε επιπλέον φιλοσοφική διάσταση στο εγχείρημα, αναδεικνύοντας την εσωτερική αξία της μαθηματικής δημιουργίας πέρα από εξωτερικά κίνητρα (Gessen, 2009).

Από επιστημολογική άποψη, τα Millennium Prize Problems σηματοδοτούν μια μετατόπιση στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα άλυτα προβλήματα. Δεν πρόκειται απλώς για τεχνικά δύσκολα ερωτήματα, αλλά για προβλήματα που αγγίζουν τα όρια της μαθηματικής γνώσης και συχνά συνδέονται με βαθύτερα ερωτήματα για το τι μπορεί να υπολογιστεί, τι μπορεί να αποδειχθεί και πώς συνδέονται τα μαθηματικά με τη φυσική πραγματικότητα (Nasar & Gruber, 2006).

Στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών, η λίστα των Millennium Prize Problems μπορεί να παρουσιαστεί ως η σύγχρονη συνέχεια της λίστας του Hilbert. Δείχνει ότι, παρά τη θεαματική πρόοδο των μαθηματικών κατά τον 20ό αιώνα, εξακολουθούν να υπάρχουν θεμελιώδη ερωτήματα που παραμένουν ανοιχτά. Με αυτόν τον τρόπο, ενισχύεται η αντίληψη ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια ολοκληρωμένη επιστήμη, αλλά ένα διαρκώς εξελισσόμενο πεδίο αναζήτησης, στο οποίο τα άλυτα προβλήματα παίζουν κεντρικό ρόλο.

Η ιστορία των μαθηματικών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ύπαρξη προβλημάτων που αντιστέκονται στις διαθέσιμες μεθόδους της κάθε εποχής. Από την αρχαιότητα έως τη σύγχρονη εποχή, τα άλυτα προβλήματα δεν αποτέλεσαν απλώς εμπόδια στην εξέλιξη της γνώσης, αλλά λειτούργησαν ως βασικοί μηχανισμοί προόδου, οδηγώντας στη δημιουργία νέων εννοιών, θεωριών και επιστημονικών εργαλείων. Η πορεία που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία αναδεικνύει με σαφήνεια ότι η εξέλιξη των μαθηματικών δεν πραγματοποιείται μόνο μέσω της επίλυσης προβλημάτων, αλλά και μέσω της διαρκούς προσπάθειας κατανόησής τους (Karp & Furinghetti, 2018).

Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας, η τριχοτόμηση της γωνίας, ο διπλασιασμός του κύβου και ο τετραγωνισμός του κύκλου, αποτελούν ίσως τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα αυτής της πραγματικότητας. Για αιώνες απασχόλησαν τους σημαντικότερους μαθηματικούς, οι οποίοι αναζήτησαν τρόπους επίλυσής τους χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της ευκλείδειας γεωμετρίας. Παρότι η τελική απάντηση ήταν αρνητική, καθώς αποδείχθηκε ότι τα προβλήματα αυτά δεν επιλύονται με κανόνα και διαβήτη, η αναζήτηση της λύσης τους

οδήγησε σε σημαντικές ανακαλύψεις και συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση νέων μαθηματικών κλάδων. Με τον τρόπο αυτό αποδείχθηκε ότι ακόμη και ένα πρόβλημα που δεν λύνεται μπορεί να αποτελέσει πηγή γόνιμης επιστημονικής δημιουργίας.

Κατά τη μετάβαση στη νεότερη εποχή, το ενδιαφέρον των μαθηματικών στράφηκε σταδιακά από τα καθαρά γεωμετρικά προβλήματα προς βαθύτερα ζητήματα που αφορούσαν τη δομή των αριθμών, τις αλγεβρικές εξισώσεις, τις συναρτήσεις και τις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης. Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός προβλήματος που παρέμεινε ανοιχτό για περισσότερο από τρεις αιώνες, επηρεάζοντας καθοριστικά την ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών. Η τελική του απόδειξη από τον Andrew Wiles δεν αποτέλεσε μόνο την επίλυση ενός ιστορικού προβλήματος, αλλά και την επιβεβαίωση της δύναμης των σύγχρονων μαθηματικών μεθόδων.

Η απαρχή του 20ού αιώνα σηματοδοτήθηκε από την εμφάνιση μιας νέας φιλοσοφίας σχετικά με τα άλυτα προβλήματα. Το Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών του 1900 στο Παρίσι και η περίφημη λίστα των 23 προβλημάτων του David Hilbert κατέδειξαν ότι τα μεγάλα ανοιχτά ερωτήματα μπορούν να λειτουργήσουν ως πυξίδα για την επιστημονική έρευνα. Πολλά από τα προβλήματα αυτά επηρέασαν βαθιά την πορεία των μαθηματικών κατά τον 20ό αιώνα, ενώ αρκετά εξακολουθούν να παραμένουν ανοιχτά μέχρι σήμερα. Η συμβολή του Hilbert δεν περιορίζεται στα ίδια τα προβλήματα, αλλά επεκτείνεται στη διαμόρφωση μιας νέας αντίληψης για τον ρόλο της μαθηματικής έρευνας, σύμφωνα με την οποία τα μεγάλα ερωτήματα είναι εξίσου σημαντικά με τις ίδιες τις απαντήσεις.

Στο τέλος του 20ού αιώνα και στις αρχές του 21ου, η παράδοση αυτή συνεχίστηκε με τα Millennium Prize Problems του Clay Mathematics Institute. Τα προβλήματα αυτά αποτελούν τη σύγχρονη έκφραση της διαχρονικής ανάγκης των μαθηματικών να θέτουν φιλόδοξους στόχους και να διερευνούν τα όρια της ανθρώπινης γνώσης. Ζητήματα όπως η Υπόθεση του Riemann, το πρόβλημα P έναντι NP και οι εξισώσεις Navier–Stokes εξακολουθούν να προκαλούν το ενδιαφέρον της διεθνούς μαθηματικής κοινότητας, αποδεικνύοντας ότι, παρά τη θεαματική πρόοδο των τελευταίων αιώνων, εξακολουθούν να υπάρχουν θεμελιώδη ερωτήματα χωρίς απάντηση.

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη των άλυτων προβλημάτων είναι ότι η αξία τους δεν εξαρτάται αποκλειστικά από την τελική επίλυσή τους. Συχνά, η πορεία προς τη λύση αποδεικνύεται σημαντικότερη από την ίδια τη λύση. Νέες θεωρίες, καινοτόμες μέθοδοι, απρόσμενες συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών κλάδων και βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών δομών προκύπτουν μέσα από τη μακροχρόνια προσπάθεια αντιμετώπισης ενός δύσκολου προβλήματος. Η ιστορία των μαθηματικών δείχνει

ότι πολλές από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις γεννήθηκαν ακριβώς επειδή κάποιο πρόβλημα παρέμενε άλυτο.

Κλείνοντας, μπορεί να υποστηριχθεί ότι τα άλυτα προβλήματα αποτελούν μία από τις σημαντικότερες κινητήριες δυνάμεις της μαθηματικής εξέλιξης. Από τους γεωμέτρους της αρχαίας Ελλάδας έως τους σύγχρονους ερευνητές που εργάζονται πάνω στα προβλήματα της χημείας, η ιστορία των μαθηματικών αποδεικνύει ότι η πρόοδος γεννιέται από τα ερωτήματα που παραμένουν ανοιχτά. Κάθε γενιά μαθηματικών παραλαμβάνει από την προηγούμενη ένα σύνολο προβλημάτων και ταυτόχρονα δημιουργεί νέα, διεκδικώντας συνεχώς τα όρια της γνώσης. Υπό αυτή την έννοια, τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν σημεία αδυναμίας των μαθηματικών, αλλά την πιο ζωντανή έκφραση της δημιουργικότητάς τους και της αδιάκοπης ανθρώπινης προσπάθειας για κατανόηση του κόσμου μέσω της λογικής και της επιστημονικής σκέψης.

Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή σημαντικών προβλημάτων των νεότερων χρόνων.

2.2.1 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

Χρονολογικά, το πρώτο μεγάλο άλυτο πρόβλημα της νεότερης εποχής μετά το 1500 θεωρείται το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, το οποίο διατυπώθηκε τον 17ο αιώνα.

Ο Pierre de Fermat υπήρξε μία από τις πλέον ιδιότυπες και επιδραστικές μορφές της μαθηματικής ιστορίας του 17ου αιώνα. Αν και επαγγελματικά ήταν νομικός και ανώτατος δικαστικός λειτουργός στο Κοινοβούλιο της Τουλούζης, η ενασχόλησή του με τα μαθηματικά υπήρξε βαθιά, δημιουργική και μακροχρόνια. Ο Fermat δεν κατείχε ακαδημαϊκή θέση και δεν δημοσίευσε συστηματικά το έργο του, γεγονός που καθιστά τη συμβολή του ακόμη πιο εντυπωσιακή, καθώς επηρέασε καθοριστικά την εξέλιξη των μαθηματικών χωρίς να ανήκει στον θεσμικό επιστημονικό κόσμο της εποχής του.

Το έργο του Fermat εκτείνεται σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, με κυρίαρχη τη θεωρία αριθμών, την οποία θεωρείται ότι ουσιαστικά θεμελίωσε ως αυτόνομο πεδίο έρευνας. Ασχολήθηκε επίσης με τη γεωμετρία, την αναλυτική γεωμετρία και τη μελέτη μεγίστων και ελαχίστων, εισάγοντας ιδέες που προοιωνίζονται την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού. Πολλές από τις μεθόδους του ήταν εξαιρετικά πρωτότυπες, αλλά συχνά διατυπώνονταν συνοπτικά και χωρίς πλήρη απόδειξη, γεγονός που άφησε ανοιχτό πεδίο για μεταγενέστερους μαθηματικούς.

Μία από τις σημαντικότερες, αλλά λιγότερο γνωστές στο ευρύ κοινό, πτυχές του έργου του Pierre de Fermat είναι η συμβολή του στη γέννηση της θεωρίας πιθανοτήτων, μέσα από την περίφημη αλληλογραφία του με τον Blaise Pascal. Η ανταλλαγή επιστολών μεταξύ των δύο

μαθηματικών πραγματοποιήθηκε το 1654 και αφορούσε κυρίως προβλήματα τυχερών παιχνιδιών, όπως το λεγόμενο «πρόβλημα των μεριδίων», δηλαδή τον δίκαιο καταμερισμό των κερδών όταν ένα παιχνίδι διακόπτεται πριν την ολοκλήρωσή του.

Μέσα από αυτή την αλληλογραφία, οι Pascal και Fermat ανέπτυξαν συστηματικούς τρόπους υπολογισμού πιθανοτήτων, εισάγοντας έννοιες όπως η αναμενόμενη τιμή και η καταμέτρηση δυνατών εκβάσεων. Για πρώτη φορά, φαινόμενα που μέχρι τότε αντιμετωπίζονταν εμπειρικά ή διαισθητικά, προσεγγίστηκαν με αυστηρά μαθηματικό τρόπο. Το γεγονός αυτό θεωρείται ιστορικά ως η αφετηρία της θεωρίας πιθανοτήτων ως αυτόνομου μαθηματικού κλάδου.

Η σημασία της αλληλογραφίας Pascal–Fermat δεν περιορίζεται μόνο στα τεχνικά αποτελέσματα. Αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του πώς η μαθηματική σκέψη μπορεί να αναπτυχθεί μέσα από διάλογο, ανταλλαγή ιδεών και ενασχόληση με προβλήματα της καθημερινής ζωής. Παράλληλα, δείχνει ότι ακόμη και μαθηματικοί που είναι κυρίως γνωστοί για θεωρητικά επιτεύγματα, όπως ο Fermat στη θεωρία αριθμών, μπορούν να συμβάλουν καθοριστικά στη γέννηση νέων κλάδων με ευρύτατες εφαρμογές.

Στο πλαίσιο της ιστορίας των μαθηματικών, η αλληλογραφία αυτή αναδεικνύει τον 17ο αιώνα ως περίοδο έντονης δημιουργικότητας και μετάβασης, κατά την οποία τα μαθηματικά άρχισαν να επεκτείνονται πέρα από τη γεωμετρία και τη θεωρία αριθμών, αγγίζοντας τη μελέτη της αβεβαιότητας και του τυχαίου. Η θεωρία πιθανοτήτων που γεννήθηκε τότε εξελίχθηκε σε θεμελιώδες εργαλείο της σύγχρονης επιστήμης, με εφαρμογές στη στατιστική, την οικονομία, τη φυσική και την κοινωνική ανάλυση.

Ένα από τα χαρακτηριστικά του Fermat ήταν η συνήθεια να καταγράφει μαθηματικές παρατηρήσεις και εικασίες στο περιθώριο βιβλίων που μελετούσε, κυρίως στο έργο *Αριθμητικά* του Διόφαντου. Μέσα από αυτές τις σημειώσεις διατυπώθηκαν ορισμένα από τα πιο διάσημα προβλήματα στην ιστορία των μαθηματικών, τα οποία συχνά συνοδεύονταν από τον ισχυρισμό ότι διαθέτει απόδειξη, χωρίς όμως αυτή να παρατίθεται. Η πρακτική αυτή συνέβαλε στη δημιουργία ενός ιδιότυπου μύθου γύρω από το πρόσωπό του, καθώς πολλές από τις εικασίες του αποδείχθηκαν αληθείς, αλλά απαιτούσαν ιδιαίτερα εξελιγμένα μαθηματικά εργαλεία για να τεκμηριωθούν.

Η επιρροή του Fermat στην εξέλιξη των μαθηματικών υπήρξε διαχρονική. Οι ιδέες του ενέπνευσαν σημαντικούς μαθηματικούς των επόμενων αιώνων και λειτούργησαν ως αφετηρία για την ανάπτυξη νέων θεωριών και μεθόδων. Παρά το γεγονός ότι ο ίδιος δεν επιδίωξε τη συστηματική παρουσίαση του έργου του, η συμβολή του αναγνωρίστηκε εκ των υστέρων ως θεμελιώδης, ιδιαίτερα στη θεωρία αριθμών.

Στο πλαίσιο αυτό, το λεγόμενο Τελευταίο Θεώρημα του Fermat αποτελεί ίσως το πιο εμβληματικό παράδειγμα της μαθηματικής του κληρονομιάς. Η απλή διατύπωσή του, σε συνδυασμό με τη μακρόχρονη αδυναμία απόδειξής του, κατέστησαν το θεώρημα αυτό σημείο αναφοράς για τη μαθηματική έρευνα επί περισσότερους από τρεις αιώνες. Η μελέτη του δεν αφορά μόνο την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο μια ιδέα, διατυπωμένη συνοπτικά από έναν μαθηματικό του 17ου αιώνα, μπορεί να καθορίσει την πορεία ολόκληρων κλάδων των μαθηματικών μέχρι τη σύγχρονη εποχή.

Σε αντίθεση με τα άλυστα προβλήματα της αρχαιότητας, το πρόβλημα αυτό δεν συνδέεται με γεωμετρικούς περιορισμούς, αλλά με τη βαθιά δομή της θεωρίας αριθμών. Η μακρόχρονη αδυναμία απόδειξής του σηματοδοτεί την απαρχή μιας νέας εποχής άλυστων προβλημάτων στα μαθηματικά.

Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat αποτελεί ίσως το πιο εμβληματικό παράδειγμα άλυστου προβλήματος στη νεότερη ιστορία των μαθηματικών. Διατυπώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Pierre de Fermat, έναν ερασιτέχνη μαθηματικό με βαθιά γνώση της θεωρίας αριθμών. Η περίφημη διατύπωση εμφανίζεται ως σημείωση στο περιθώριο ενός αντιτύπου των *Αριθμητικών* του Διοφάντου όπου ο Fermat έγραψε ότι η εξίσωση. Η $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις για $n > 2$, προσθέτοντας ότι διαθέτει μια «θαυμάσια απόδειξη», την οποία όμως το περιθώριο της σελίδας δεν επαρκούσε για να χωρέσει.

Η απλότητα της διατύπωσης σε συνδυασμό με την αυτοπεποίθηση του Fermat δημιούργησαν την εντύπωση ότι το θεώρημα δεν θα μπορούσε να είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Για αιώνες, μαθηματικοί πίστευαν ότι η απόδειξη θα ήταν θέμα τεχνικής επιδεξιότητας. Ωστόσο, παρά τις επιμέρους επιτυχίες για συγκεκριμένες τιμές του εκθέτη n , το πρόβλημα παρέμεινε άλυστο στη γενική του μορφή.

Κατά τη διάρκεια των επόμενων τριών αιώνων, κορυφαίοι μαθηματικοί ενεπλάκησαν στην προσπάθεια απόδειξης του θεωρήματος. Ο Euler, ο Legendre, ο Dirichlet, ο Kummer και άλλοι σημείωσαν σημαντική πρόοδο, αναπτύσσοντας νέες ιδέες και τεχνικές. Ιδιαίτερα ο Kummer με τη μελέτη των ιδεωδών αριθμών, άνοιξε τον δρόμο για τη σύγχρονη αλγεβρική θεωρία αριθμών, δείχνοντας ότι το πρόβλημα δεν ήταν μεμονωμένο αλλά συνδεδεμένο με βαθύτερες δομές της αριθμητικής.

Παρά τις προσπάθειες αυτές, το θεώρημα παρέμενε απρόσιτο, γεγονός που σταδιακά μετέτρεψε την αρχική αισιοδοξία σε συνειδητοποίηση της πραγματικής δυσκολίας του προβλήματος. Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat έπαψε να θεωρείται ένα «πείσμα» της ιστορίας και άρχισε να αντιμετωπίζεται ως θεμελιώδες ερώτημα που απαιτούσε νέα μαθηματικά εργαλεία.

Η απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat από τον Andrew Wiles αποτελεί ένα από τα πιο εμβληματικά παραδείγματα μακρόχρονης μαθηματικής αφοσίωσης και βαθιάς θεωρητικής σύνθεσης. Δεν πρόκειται απλώς για την επίλυση ενός μεμονωμένου προβλήματος της θεωρίας αριθμών, αλλά για την κορύφωση μιας ερευνητικής πορείας που διήρκεσε περισσότερους από τρεις αιώνες και οδήγησε στη σύγκλιση διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών.

Η προσωπική ενασχόληση του Wiles με το θεώρημα ξεκίνησε ήδη από την παιδική του ηλικία. Σε ηλικία περίπου δέκα ετών ήρθε για πρώτη φορά σε επαφή με τη διατύπωση του προβλήματος και γοητεύτηκε από την απλότητά του σε συνδυασμό με τη φήμη της δυσκολίας του. Η ενασχόληση αυτή εξελίχθηκε σε μακροχρόνιο προσωπικό στόχο, ο οποίος καθόρισε σε μεγάλο βαθμό τη μετέπειτα ακαδημαϊκή του πορεία.

Η καθοριστική στροφή στην ιστορία του προβλήματος σημειώθηκε τη δεκαετία του 1980, όταν αποκαλύφθηκε η βαθιά σύνδεση του Τελευταίου Θεωρήματος του Pierre de Fermat με την εικασία Taniyama–Shimura–Weil (γνωστή σήμερα ως Θεώρημα Μοναδικότητας των ελλειπτικών καμπυλών). Συγκεκριμένα, είχε αποδειχθεί ότι αν η εικασία αυτή ισχύει για μια σημαντική κλάση ελλειπτικών καμπυλών (τις ημι-σταθερές), τότε το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat ακολουθεί ως άμεσο συμπέρασμα. Η σύνδεση αυτή, που βασίστηκε στο έργο του Frey, του Ribet και άλλων, μετέφερε το πρόβλημα από την κλασική θεωρία αριθμών στο πεδίο της σύγχρονης αλγεβρικής γεωμετρίας.

Από το 1986 και έπειτα, ο Wiles αφιερώθηκε σχεδόν αποκλειστικά στην προσπάθεια απόδειξης της εικασίας Taniyama–Shimura για την κρίσιμη αυτή κλάση ελλειπτικών καμπυλών. Εργάστηκε για περίπου επτά χρόνια σε συνθήκες σχεδόν πλήρους απομόνωσης, αποφεύγοντας να δημοσιοποιήσει την ενασχόλησή του ακόμη και σε στενούς συνεργάτες. Η επιλογή αυτή αντανακλά τόσο τη δυσκολία του προβλήματος όσο και τον προσωπικό χαρακτήρα της προσπάθειας, η οποία είχε μετατραπεί σε σκοπό ζωής.

Το 1993, ο Wiles ανακοίνωσε δημόσια ότι είχε ολοκληρώσει την απόδειξη, παρουσιάζοντάς την σε μια σειρά διαλέξεων στο Cambridge. Η ανακοίνωση αυτή προκάλεσε παγκόσμιο ενδιαφέρον, καθώς φαινόταν ότι ένα από τα πιο διάσημα άλυστα προβλήματα της ιστορίας είχε επιτέλους επιλυθεί. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ελέγχου της απόδειξης, εντοπίστηκε ένα σοβαρό κενό σε ένα κρίσιμο τεχνικό σημείο, που αφορούσε τη θεωρία παραμορφώσεων των Γκαλουά αναπαραστάσεων. Το κενό αυτό έθεσε σε αμφισβήτηση τη συνολική εγκυρότητα της απόδειξης και οδήγησε τον Wiles σε μια περίοδο έντονης επανεξέτασης και αναστοχασμού. Μαζί με τον πρώην μαθητή του, Richard Taylor, εργάστηκε εκ νέου πάνω στο πρόβλημα, αναπτύσσοντας νέες τεχνικές και τροποποιώντας την αρχική

προσέγγιση. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η εισαγωγή μιας εναλλακτικής μεθόδου, γνωστής ως μέθοδος Taylor–Wiles, η οποία επέτρεψε την πλήρη και αυστηρή κάλυψη του κενού.

Από τεχνική άποψη, η απόδειξη του Wiles βασίζεται στη βαθιά μελέτη της σχέσης μεταξύ ελλειπτικών καμπυλών και αρθρωτών μορφών. Κεντρικό ρόλο παίζουν οι Γκαλουά αναπαραστάσεις, η θεωρία παραμορφώσεων τους και η σύγκριση συγκεκριμένων δακτυλίων που κωδικοποιούν αρθρωτές και γεωμετρικές πληροφορίες. Αν και οι τεχνικές λεπτομέρειες είναι εξαιρετικά απαιτητικές, η βασική ιδέα συνίσταται στην απόδειξη ότι δύο φαινομενικά διαφορετικές μαθηματικές δομές είναι στην πραγματικότητα ισομορφικές, γεγονός που επιτρέπει τη μεταφορά ιδιοτήτων από τη μία στην άλλη. Η τελική, πλήρης απόδειξη δημοσιεύθηκε το 1995 και έγινε καθολικά αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα. Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat έπαψε πλέον να αποτελεί εικασία και μετατράπηκε σε θεώρημα, όχι μέσω μιας άμεσης αριθμητικής απόδειξης, αλλά μέσω της ανάπτυξης νέων θεωρητικών εργαλείων που επηρέασαν βαθιά τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα (Dongfang, , 2026).

Η απόδειξη του Wiles αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο τα άλυτα προβλήματα λειτουργούν ως κινητήριες δυνάμεις της μαθηματικής προόδου. Η λύση ενός προβλήματος οδήγησε στη δημιουργία νέας θεωρίας, στη σύνδεση διαφορετικών κλάδων και στην αναδιαμόρφωση του τοπίου της θεωρίας αριθμών. Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, η περίπτωση του Wiles αναδεικνύει με μοναδικό τρόπο ότι τα μαθηματικά δεν εξελίσσονται μόνο μέσω άμεσων απαντήσεων, αλλά κυρίως μέσω βαθιάς, επίμονης και δημιουργικής αναζήτησης. Αν και το θεώρημα του Fermat δεν περιλαμβανόταν στα Millennium Prize Problems, η λύση του θεωρήθηκε αντίστοιχης ιστορικής σημασίας. Ο Wiles τιμήθηκε με το Wolfskehl Prize, που είχε θεσπιστεί ειδικά για την απόδειξη του θεωρήματος, καθώς και με κορυφαίες διεθνείς διακρίσεις, όπως το Abel Prize, αναγνωρίζοντας τη βαθιά και μακρόπνοη συμβολή του στα μαθηματικά (Gevorkyan, 2023).

Η ιστορία του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat δείχνει με μοναδικό τρόπο ότι ένα άλυτο πρόβλημα μπορεί να λειτουργήσει ως κινητήριος δύναμη της επιστημονικής προόδου. Από μια φαινομενικά απλή σημείωση στο περιθώριο ενός βιβλίου έως την ανάπτυξη ολόκληρων μαθηματικών θεωριών, το θεώρημα αυτό ενσαρκώνει τη δυναμική και εξελισσόμενη φύση των μαθηματικών. Μετά τη διατύπωση του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat τον 17ο αιώνα, το επόμενο μεγάλο άλυτο πρόβλημα που αναδείχθηκε στη θεωρία αριθμών ήταν η Εικασία του Goldbach, η οποία διατυπώθηκε το 1742. Η εξαιρετικά απλή διατύπωσή της, σε συνδυασμό με την επίμονη αδυναμία απόδειξής της, κατέστησαν σαφές ότι

τα μαθηματικά εισέρχονταν σε μια εποχή όπου τα όρια της γνώσης δεν σχετίζονταν πλέον με τη γεωμετρική κατασκευή, αλλά με τη βαθιά δομή των αριθμών (Kilani, 2023).

2.2.2 Η εικασία του Goldbach

Η Εικασία του Goldbach διατυπώθηκε το 1742 από τον Christian Goldbach σε επιστολή του προς τον Leonhard Euler και αφορά τη θεμελιώδη δομή των φυσικών αριθμών. Στη σύγχρονη, «ισχυρή» μορφή της, η εικασία δηλώνει ότι κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Η διατύπωσή της είναι τόσο απλή, ώστε μοιάζει σχεδόν αυτονόητη, γεγονός που συνέβαλε στην αρχική εντύπωση ότι η απόδειξή της δεν θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη. Ωστόσο, πολύ σύντομα έγινε φανερό ότι η εικασία του Goldbach δεν υπάκουε στις συνήθεις μεθόδους της αριθμητικής. Παρά την εκτεταμένη αριθμητική επαλήθευση για τεράστιες περιοχές τιμών, καμία γενική απόδειξη δεν κατέστη δυνατή. Η δυσκολία του προβλήματος δεν έγκειται στην επαλήθευση μεμονωμένων περιπτώσεων, αλλά στη βαθιά και ακανόνιστη κατανομή των πρώτων αριθμών, η οποία παραμένει ένα από τα πιο αινιγματικά ζητήματα της μαθηματικής επιστήμης (Orús-Lacort, et al., 2023).

Κατά τον 19ο και 20ό αιώνα, η εικασία του Goldbach προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών κορυφαίων μαθηματικών και συνδέθηκε στενά με την ανάπτυξη της αναλυτικής θεωρίας αριθμών. Σημαντική πρόοδος σημειώθηκε μέσω μεθόδων που βασίζονται στη θεωρία των τριγωνομετρικών αθροισμάτων και στη μέθοδο του κύκλου του Hardy–Littlewood. Ιδιαίτερα σημαντικό αποτέλεσμα αποτελεί το θεώρημα του Vinogradov (1937), σύμφωνα με το οποίο κάθε επαρκώς μεγάλος περιττός ακέραιος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών πρώτων αριθμών. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η «ασθενής» μορφή της εικασίας είναι, σε μεγάλο βαθμό, κατανοητή, χωρίς όμως να επιλύει την αρχική πρόταση.

Στη σύγχρονη εποχή, η υπολογιστική ισχύς επέτρεψε την επαλήθευση της εικασίας του Goldbach για τεράστιες περιοχές φυσικών αριθμών, φτάνοντας σε εξαιρετικά υψηλά όρια. Παρ' όλα αυτά, η αριθμητική επιβεβαίωση δεν υποκαθιστά την ανάγκη μιας αυστηρής απόδειξης, γεγονός που διατηρεί την εικασία στο επίκεντρο της θεωρητικής έρευνας. Αν και η εικασία του Goldbach δεν περιλαμβάνεται στα Millennium Prize Problems, θεωρείται από πολλούς μαθηματικούς ισάξιας σημασίας με αυτά. Η απουσία της από τη λίστα του 2000 δεν οφείλεται σε έλλειψη βαρύτητας, αλλά στο γεγονός ότι η λίστα του Clay επιλέχθηκε ώστε να καλύπτει ευρύτερους θεματικούς άξονες των μαθηματικών και της μαθηματικής φυσικής. Η εικασία του Goldbach, όπως και το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat πριν από τη λύση του, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος που, παρά την απλότητά του, αποκαλύπτει

τα βαθύτερα όρια της ανθρώπινης κατανόησης των αριθμών. Σήμερα, η εικασία του Goldbach παραμένει άλυτη στη γενική της μορφή και συνεχίζει να λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για τη θεωρία αριθμών. Η μακρόχρονη ανθεκτικότητά της επιβεβαιώνει ότι τα μεγάλα άλυτα προβλήματα δεν είναι απλώς ιστορικά κατάλοιπα, αλλά ζωντανά ερευνητικά πεδία, τα οποία διαμορφώνουν τη μαθηματική σκέψη κάθε εποχής.

Η Εικασία του Goldbach αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μαθηματικού προβλήματος του οποίου η διατύπωση είναι εξαιρετικά απλή, ενώ η πλήρης απόδειξή του παραμένει άγνωστη. Η αντίθεση αυτή ανάμεσα στην απλότητα της διατύπωσης και στη δυσκολία της απόδειξης αποτελεί ένα από τα πιο γοητευτικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών.

Η Εικασία του Goldbach αποτελεί ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα μαθηματικού προβλήματος του οποίου η διατύπωση είναι εξαιρετικά απλή, ενώ η πλήρης απόδειξή του παραμένει άγνωστη. Από τη διατύπωσή της το 1742 έως σήμερα, έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών από τους σημαντικότερους μαθηματικούς, συμβάλλοντας καθοριστικά στην ανάπτυξη της αναλυτικής θεωρίας αριθμών και στη βαθύτερη κατανόηση της κατανομής των πρώτων αριθμών (Madisa, 2026).

Κατά τον 20ό αιώνα, σημαντική πρόοδος σημειώθηκε μέσα από το έργο των Hardy και Littlewood, οι οποίοι ανέπτυξαν τη λεγόμενη μέθοδο του κύκλου (circle method). Η μέθοδος αυτή αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της αναλυτικής θεωρίας αριθμών και χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση ακεραίων ως αθροίσματα πρώτων αριθμών. Αν και η μέθοδος δεν οδήγησε σε πλήρη απόδειξη της εικασίας, παρείχε ισχυρές ενδείξεις υπέρ της ορθότητάς της και άνοιξε νέους ερευνητικούς δρόμους (Hardy & Wright, 2008).

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα προήλθε από τον Ivan Vinogradov το 1937, ο οποίος απέδειξε ότι κάθε επαρκώς μεγάλος περιττός ακεραίος μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα τριών πρώτων αριθμών. Το αποτέλεσμα αυτό θεωρήθηκε σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση της Εικασίας του Goldbach, καθώς επιβεβαίωσε ότι οι τεχνικές της αναλυτικής θεωρίας αριθμών μπορούν να δώσουν ουσιαστικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά των πρώτων αριθμών και τις μεταξύ τους σχέσεις (Vinogradov, 1954).

Η σημαντικότερη εξέλιξη των τελευταίων δεκαετιών σημειώθηκε με το έργο του Harald Helfgott, ο οποίος ολοκλήρωσε την απόδειξη της λεγόμενης ασθενούς Εικασίας του Goldbach. Σύμφωνα με αυτή, κάθε περιττός ακεραίος μεγαλύτερος του 5 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών πρώτων αριθμών. Η απόδειξη δημοσιεύθηκε οριστικά το 2013 και αποτέλεσε σημαντικό ορόσημο στη σύγχρονη θεωρία αριθμών, καθώς επιβεβαίωσε ένα πρόβλημα που παρέμενε ανοιχτό για περισσότερο από έναν αιώνα (Helfgott, 2013).

Παρά τη σημαντική αυτή πρόοδο, η ισχυρή μορφή της Εικασίας του Goldbach εξακολουθεί να παραμένει άλυτη. Παράλληλα, έχουν πραγματοποιηθεί εκτεταμένοι υπολογιστικοί έλεγχοι, οι οποίοι έχουν επαληθεύσει την εικασία για εξαιρετικά μεγάλες περιοχές φυσικών αριθμών χωρίς να εντοπιστεί κάποιο αντιπαράδειγμα. Ωστόσο, όπως συμβαίνει συχνά στα μαθηματικά, η υπολογιστική επιβεβαίωση, όσο εκτεταμένη και αν είναι, δεν μπορεί να υποκαταστήσει μια γενική μαθηματική απόδειξη.

Η διαχρονική γοητεία της Εικασίας του Goldbach συνδέεται άμεσα με την αντίθεση ανάμεσα στην απλότητα της διατύπωσής της και στη δυσκολία της απόδειξής της. Το γεγονός αυτό έχει επισημανθεί από τον G. H. Hardy, ο οποίος στην *Απολογία ενός Μαθηματικού* υποστήριξε ότι ορισμένα από τα βαθύτερα προβλήματα της θεωρίας αριθμών μπορούν να διατυπωθούν με τρόπο κατανοητό ακόμη και σε μη ειδικούς, ενώ η επίλυσή τους απαιτεί εξαιρετικά σύνθετες μαθηματικές ιδέες (Hardy, 1940/2012). Η Εικασία του Goldbach αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της αντίθεσης και αναδεικνύει έναν από τους λόγους για τους οποίους η θεωρία αριθμών κατέχει τόσο σημαντική θέση στην ιστορία των μαθηματικών (Shaghghi, 2024).

Επιπλέον, η μακροχρόνια προσπάθεια απόδειξης της εικασίας δείχνει ότι η αξία ενός μαθηματικού προβλήματος δεν εξαρτάται αποκλειστικά από την τελική επίλυσή του. Όπως συνέβη και με το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, η αναζήτηση της λύσης οδήγησε στην ανάπτυξη νέων θεωριών, τεχνικών και ερευνητικών προσεγγίσεων. Υπό αυτή την έννοια, η Εικασία του Goldbach δεν αποτελεί μόνο ένα ανοιχτό πρόβλημα της θεωρίας αριθμών, αλλά και ένα σημαντικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο τα άλυτα προβλήματα συμβάλλουν στη διαρκή εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης.

2.2.3 Επίλυσιμότητα πολυωνυμικών εξισώσεων

Η μελέτη των πολυωνυμικών εξισώσεων αποτελεί έναν από τους αρχαιότερους και κεντρικότερους άξονες της άλγεβρας. Ήδη από την αρχαιότητα, οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με την επίλυση εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, καθώς τέτοια προβλήματα προέκυπταν φυσικά από γεωμετρικά και πρακτικά ζητήματα. Οι εξισώσεις πρώτου βαθμού επιλύονται άμεσα και δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες, ενώ οι εξισώσεις δεύτερου βαθμού αποτέλεσαν το πρώτο ουσιαστικό βήμα προς τη γενική αλγεβρική επίλυση. Η γνωστή σήμερα μέθοδος της διακρίνουσας και ο κλειστός τύπος επίλυσης ήταν γνωστά ήδη από την αρχαιότητα και συστηματοποιήθηκαν πλήρως στην αραβική και αναγεννησιακή μαθηματική παράδοση (Sözen et al., 2020).

Κατά τον 16ο αιώνα, η άλγεβρα γνώρισε σημαντική πρόοδο με την ανακάλυψη κλειστών τύπων επίλυσης για εξισώσεις τρίτου και τέταρτου βαθμού. Η λύση της κυβικής εξίσωσης αποδίδεται στον Scipione del Ferro και διαδόθηκε ευρύτερα από τον Gerolamo Cardano, ενώ ο τύπος επίλυσης της εξίσωσης τετάρτου βαθμού προέκυψε λίγο αργότερα από τον Lodovico Ferrari. Οι επιτυχίες αυτές δημιούργησαν την ισχυρή πεποίθηση ότι για κάθε πολωνυμική εξίσωση υπάρχει ένας αντίστοιχος κλειστός τύπος επίλυσης με ριζικά (Greither, 2018).

Η ιστορία των πολωνυμικών εξισώσεων αποτελεί ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα όπου η μαθηματική πρόοδος οδήγησε όχι μόνο σε λύσεις, αλλά και σε σαφή όρια της επιλυσιμότητας. Ήδη από την αρχαιότητα και τον Μεσαίωνα, η επίλυση εξισώσεων αποτελούσε κεντρικό στόχο της άλγεβρας, ενώ κατά την Αναγέννηση σημειώθηκαν σημαντικές επιτυχίες με την εύρεση γενικών τύπων επίλυσης για τις εξισώσεις δευτέρου, τρίτου και τέταρτου βαθμού (Chorlay, et al., 2022).

Η επιτυχία αυτή δημιούργησε την εύλογη προσδοκία ότι θα μπορούσε να υπάρξει αντίστοιχος «κλειστός τύπος» και για πολωνυμικές εξισώσεις υψηλότερου βαθμού. Για μεγάλο χρονικό διάστημα, οι μαθηματικοί αναζητούσαν επίμονα έναν γενικό τύπο επίλυσης της εξίσωσης πέμπτου βαθμού, θεωρώντας ότι πρόκειται απλώς για τεχνική δυσκολία. Ωστόσο, τον 19ο αιώνα αποδείχθηκε ότι η προσδοκία αυτή ήταν λανθασμένη. Μετά τις επιτυχίες των Cardano και Ferrari κατά τον 16ο αιώνα, πολλοί μαθηματικοί πίστεψαν ότι αργά ή γρήγορα θα ανακαλυπτόταν ένας αντίστοιχος τύπος και για τις εξισώσεις πέμπτου βαθμού. Κατά τους επόμενους δύο αιώνες πραγματοποιήθηκαν πολυάριθμες προσπάθειες από σημαντικούς ερευνητές, όπως οι Tschirnhaus, Euler, Bézout και Lagrange (Greither, 2018).

Ιδιαίτερα ο Lagrange μελέτησε συστηματικά τις συμμετρίες των ριζών των πολωνυμικών εξισώσεων, εισάγοντας ιδέες που αργότερα θα επηρέαζαν καθοριστικά τη θεωρία Galois. Παρά τη σημαντική πρόοδο που επιτεύχθηκε, καμία από τις προσπάθειες αυτές δεν οδήγησε σε γενικό τύπο επίλυσης. Αντίθετα, η σταδιακή κατανόηση των δυσκολιών του προβλήματος οδήγησε στη συνειδητοποίηση ότι ίσως το πραγματικό ερώτημα δεν ήταν η εύρεση ενός νέου τύπου, αλλά η διερεύνηση του κατά πόσο ένας τέτοιος τύπος μπορεί να υπάρξει (Blum-Smith et al., 2013).

Το καθοριστικό αποτέλεσμα ήρθε αρχικά με τον Niels Henrik Abel, ο οποίος απέδειξε ότι δεν υπάρχει γενικός κλειστός τύπος επίλυσης της πολωνυμικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού με ριζικά. Το αποτέλεσμα αυτό δεν σήμαινε απλώς αποτυχία, αλλά αποκάλυπτε ότι η έννοια της «λύσης» πρέπει να επαναπροσδιοριστεί. Το ερώτημα δεν ήταν πλέον πώς βρίσκουμε τη λύση, αλλά αν η λύση μπορεί να εκφραστεί με συγκεκριμένο τρόπο. Το επόμενο και βαθύτερο βήμα έγινε από τον Évariste Galois, ο οποίος εισήγαγε μια εντελώς νέα οπτική. Η θεωρία του Galois

δεν δίνει τύπους επίλυσης, αλλά ένα κριτήριο: καθορίζει πότε μια πολυωνυμική εξίσωση είναι επιλύσιμη με ριζικά και πότε όχι, μέσω της μελέτης της δομής των συμμετριών των ριζών της. Με αυτόν τον τρόπο, η άλγεβρα μετατοπίστηκε από την αναζήτηση υπολογιστικών τύπων στη μελέτη αφηρημένων δομών (Blum & Coskey, 2013).

Η σημασία αυτής της εξέλιξης είναι βαθιά επιστημολογική. Για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, αποδείχθηκε ότι ένα πρόβλημα δεν είναι άλυτο λόγω έλλειψης τεχνικών, αλλά επειδή δεν επιδέχεται λύση με τα επιλεγμένα μέσα. Η θεωρία του Galois δεν απαντά στο «πώς λύνεται» μια εξίσωση, αλλά στο «αν μπορεί να λυθεί» με συγκεκριμένο τρόπο, εισάγοντας έτσι μια νέα κατηγορία μαθηματικών ερωτημάτων (Stillwell, 2020).

Παράλληλα με αυτά τα αποτελέσματα, καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των πολυωνυμικών εξισώσεων έπαιξε και ο Carl Friedrich Gauss. Με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, ο Gauss απέδειξε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες, λαμβάνοντας υπόψη τις πολλαπλότητες. Το αποτέλεσμα αυτό δεν δίνει τρόπο εύρεσης των ριζών, αλλά εξασφαλίζει την ύπαρξή τους και ολοκληρώνει θεωρητικά την εικόνα των πολυωνυμικών εξισώσεων (Remmert & Burckel, 1990).

Συνολικά, η ιστορία των πολυωνυμικών εξισώσεων δείχνει με εντυπωσιακό τρόπο πώς τα μαθηματικά εξελίσσονται από την αναζήτηση τύπων προς την κατανόηση δομών και ορίων. Από τις απλές εξισώσεις πρώτου βαθμού έως τη θεωρία του Galois, η άλγεβρα δεν απαντά μόνο στο ερώτημα «πώς λύνεται μια εξίσωση», αλλά και στο βαθύτερο ερώτημα «αν μπορεί να λυθεί». Το πέρασμα αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της μετάβασης από την κλασική στην σύγχρονη μαθηματική σκέψη και προσφέρει ένα από τα πιο διδακτικά παραδείγματα των ορίων και των δυνατοτήτων της μαθηματικής γνώσης (Leo, 2015).

2.2.4 Η ικασία του Riemann

Η μελέτη των πρώτων αριθμών αποτελεί έναν από τους αρχαιότερους και βαθύτερους πυλώνες της θεωρίας αριθμών. Πρώτοι ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 1 που έχουν ακριβώς δύο θετικούς διαιρέτες, τον εαυτό τους και τη μονάδα. Παρά τον απλό αυτό ορισμό, οι πρώτοι αριθμοί παρουσιάζουν μια εξαιρετικά πολύπλοκη και ακανόνιστη συμπεριφορά, γεγονός που τους καθιστά αντικείμενο εντατικής μελέτης από την αρχαιότητα έως σήμερα. Το βασικό πρόβλημα που σχετίζεται με τους πρώτους αριθμούς δεν είναι η αναγνώρισή τους, αλλά η κατανόηση της κατανομής τους καθώς προχωρούμε προς το άπειρο (Boulay, 2023).

Ήδη από τον 18ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Leonhard Euler αντιλήφθηκαν ότι οι πρώτοι αριθμοί δεν μπορούν να μελετηθούν μόνο με στοιχειώδεις αριθμητικές μεθόδους. Ο Euler αποκάλυψε μια βαθιά σύνδεση ανάμεσα στους πρώτους αριθμούς και τις άπειρες σειρές, δείχνοντας ότι η δομή των πρώτων αντανakλάται σε αναλυτικές συναρτήσεις. Το περίφημο γινόμενο του Euler, το οποίο συνδέει τη ζήτα συνάρτηση με τους πρώτους αριθμούς, αποτέλεσε το πρώτο σαφές σημάδι ότι η κατανομή των πρώτων κρύβεται πίσω από αναλυτικά φαινόμενα και όχι απλώς πίνακες αριθμών (Jr, 2015).

Η συνάρτηση ζ του Riemann αποτελεί ένα από τα πιο κεντρικά και βαθιά αντικείμενα της σύγχρονης θεωρίας αριθμών και βρίσκεται στον πυρήνα της περίφημης Εικασίας του Riemann. Μελετήθηκε συστηματικά από τον Bernhard Riemann το 1859 και αρχικά ορίζεται, για μιγαδικούς αριθμούς με πραγματικό μέρος μεγαλύτερο του 1, ως το άθροισμα της άπειρης σειράς $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Παρότι ο ορισμός αυτός φαίνεται απλός, η συνάρτηση εμφανίζει εξαιρετικά πολύπλοκη συμπεριφορά και αποδεικνύεται ότι περιέχει βαθιά πληροφορία για τη δομή των φυσικών αριθμών (Connes, 2026).

Η ουσιαστική σημασία της συνάρτησης ζ δεν προκύπτει μόνο από τον αρχικό της ορισμό, αλλά κυρίως από τη στενή της σχέση με τους πρώτους αριθμούς. Ήδη από τον Euler είχε διαπιστωθεί ότι η ζ -συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άπειρο γινόμενο πάνω σε όλους τους πρώτους αριθμούς, γεγονός που αποκαλύπτει ότι οι πρώτοι αποτελούν τα θεμελιώδη δομικά της στοιχεία. Η σχέση αυτή δείχνει ότι η κατανομή των πρώτων αριθμών δεν είναι ανεξάρτητη από αναλυτικές ιδιότητες συναρτήσεων, αλλά συνδέεται άρρηκτα με αυτές (Mthimkulu, 2021).

Το αποφασιστικό βήμα του Riemann ήταν η μελέτη της ζ -συνάρτησης ως συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής. Μέσω της αναλυτικής συνέχειας, επέκτεινε τον ορισμό της σε ολόκληρο σχεδόν το μιγαδικό επίπεδο, με εξαίρεση το σημείο $s=1$, όπου η συνάρτηση παρουσιάζει πόλο. Επιπλέον, απέδειξε ότι η ζ -συνάρτηση ικανοποιεί μια βαθιά λειτουργική εξίσωση, η οποία αποκαλύπτει μια συμμετρία ανάμεσα στις τιμές της στο s και στο $1-s$. Η συμμετρία αυτή παίζει καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των μηδενικών της (Valtancoli, 2026).

Η ζ -συνάρτηση διαθέτει δύο κατηγορίες μηδενικών: τα τετριμμένα μηδενικά, τα οποία βρίσκονται στα αρνητικά άρτια ακέραια, και τα μη τετριμμένα μηδενικά, τα οποία ανήκουν στην αποκαλούμενη κρίσιμη λωρίδα, δηλαδή στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών με πραγματικό μέρος μεταξύ 0 και 1. Η Εικασία του Riemann διατυπώνει τον ισχυρισμό ότι όλα τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ -συνάρτησης έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$ (Heymann, 2018).

Παρότι η διατύπωση αυτή είναι τεχνική, οι συνέπειές της είναι εξαιρετικά σημαντικές, καθώς σχετίζονται άμεσα με την ακρίβεια με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε την κατανομή των πρώτων αριθμών. Η σημασία της συνάρτησης ζ έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στην ανάλυση και τη θεωρία αριθμών. Μέσα από τη μελέτη των μηδενικών της, οι μαθηματικοί μπορούν να αντλήσουν πληροφορίες για το πόσο «ομαλά» ή «ακανόνιστα» κατανέμονται οι πρώτοι αριθμοί καθώς προχωρούμε προς το άπειρο. Πολλά αποτελέσματα της σύγχρονης θεωρίας αριθμών είναι γνωστό ότι ισχύουν υπό την προϋπόθεση της αλήθειας της Εικασίας του Riemann, γεγονός που αναδεικνύει τον κεντρικό ρόλο της ζ -συνάρτησης (Mantzakouras, 2021).

Από ευρύτερη επιστημολογική σκοπιά, η συνάρτηση ζ του Riemann αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του πώς ένας απλός ορισμός μπορεί να οδηγήσει σε εξαιρετικό θεωρητικό βάθος. Ξεκινώντας από ένα άθροισμα που περιλαμβάνει όλους τους φυσικούς αριθμούς, καταλήγει να καθορίζει τη συμπεριφορά των πρώτων, οι οποίοι με τη σειρά τους αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία της αριθμητικής. Για τον λόγο αυτό, η ζ -συνάρτηση θεωρείται ένα από τα πιο μελετημένα αντικείμενα στην ιστορία των μαθηματικών και η Εικασία του Riemann ένα από τα σημαντικότερα άλυτα προβλήματα, όχι μόνο λόγω της τεχνικής δυσκολίας της, αλλά και λόγω της βαθιάς εικόνας που προσφέρει για τη φύση των αριθμών (Basta, 2024).

Τον 19ο αιώνα, ο Carl Friedrich Gauss προχώρησε ακόμη περισσότερο, παρατηρώντας εμπειρικά ότι ο αριθμός των πρώτων μικρότερων από έναν δοθέντα αριθμό x προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $\frac{x}{\ln x}$. Αν και ο Gauss δεν απέδειξε ποτέ το αποτέλεσμα αυτό, η εικασία του οδήγησε αργότερα στο Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών. Παρά την επιτυχία αυτή, το θεώρημα περιγράφει μόνο τη μέση συμπεριφορά των πρώτων και όχι τις λεπτές διακυμάνσεις και ανωμαλίες στην κατανομή τους. Το ουσιαστικό ερώτημα παραμένει: δεν γνωρίζουμε έναν ακριβή και προβλέψιμο τρόπο με τον οποίο «εμφανίζονται» οι πρώτοι αριθμοί (Kotnik, 2008).

Αυτό ακριβώς το πρόβλημα της διασποράς των πρώτων αριθμών αποτελεί το κεντρικό ζητούμενο της σύγχρονης θεωρίας αριθμών. Δεν υπάρχει γνωστός τύπος που να παράγει τους πρώτους αριθμούς με συστηματικό τρόπο, ούτε κάποιο σαφές μοτίβο που να επιτρέπει την πρόβλεψη του επόμενου πρώτου. Οι πρώτοι εμφανίζονται φαινομενικά τυχαίοι, αν και γνωρίζουμε ότι δεν είναι τυχαίοι με την αυστηρή μαθηματική έννοια. Η κατανόηση αυτής της «ψευδοτυχαιότητας» αποτελεί ένα από τα βαθύτερα προβλήματα των μαθηματικών (Ferreira, 2017).

Σε αυτό το σημείο εμφανίζεται ο Bernhard Riemann, ένας από τους πιο διορατικούς μαθηματικούς του 19ου αιώνα. Το 1859, σε ένα σύντομο αλλά εξαιρετικά πυκνό άρθρο, ο Riemann μελέτησε τη ζήτα συνάρτηση ως συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και διατύπωσε την περίφημη Εικασία του Riemann. Η εικασία αυτή αφορά τη θέση των μη τετριμμένων μηδενικών της ζήτα συνάρτησης και υποστηρίζει ότι όλα έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$. Αν και η διατύπωσή της είναι τεχνική, η σημασία της είναι θεμελιώδης: η αλήθεια της Εικασίας του Riemann συνεπάγεται εξαιρετικά ακριβείς πληροφορίες για την κατανομή των πρώτων αριθμών (Bayer, 2017).

Από τη διατύπωσή της το 1859, η Εικασία του Riemann έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης από ορισμένους από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της σύγχρονης εποχής. Παρά τις πολυάριθμες προσπάθειες, καμία πλήρης απόδειξη δεν έχει βρεθεί. Ωστόσο, έχει επιτευχθεί σημαντική πρόοδος προς την κατανόηση της εικασίας. Ήδη από τις αρχές του 20ού αιώνα, οι Hadamard και de la Vallée Poussin απέδειξαν ανεξάρτητα το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών, αξιοποιώντας ιδιότητες της συνάρτησης ζ και δείχνοντας ότι δεν υπάρχουν μηδενικά της συνάρτησης πάνω στην ευθεία $Re(s) = 1$ (Spigler, 2025). Το αποτέλεσμα αυτό αποτέλεσε ένα από τα πρώτα μεγάλα βήματα στη μελέτη της εικασίας. Κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα αναπτύχθηκαν νέες τεχνικές από τους Hardy, Littlewood, Selberg, Levinson και πολλούς άλλους μαθηματικούς. Ιδιαίτερα σημαντικό υπήρξε το αποτέλεσμα του Hardy το 1914, σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν άπειρα μη τετριμμένα μηδενικά επάνω στην κρίσιμη ευθεία $Re(s) = \frac{1}{2}$ (Madisa, 2026).

Αργότερα, ο Levinson απέδειξε ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μηδενικών βρίσκεται στην κρίσιμη ευθεία, ενώ σύγχρονες έρευνες έχουν αυξήσει περαιτέρω το ποσοστό αυτό. Παράλληλα, η ανάπτυξη των υπολογιστών επέτρεψε τον έλεγχο τεράστιου αριθμού μηδενικών της συνάρτησης. Μέχρι σήμερα έχουν επαληθευθεί υπολογιστικά δισεκατομμύρια μη τετριμμένα μηδενικά και όλα βρέθηκαν να έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$. Ωστόσο, όπως συμβαίνει σε κάθε μαθηματικό πρόβλημα, η υπολογιστική επαλήθευση δεν υποκαθιστά μια γενική μαθηματική απόδειξη. Για τον λόγο αυτό, η Εικασία του Riemann εξακολουθεί να θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα ανοιχτά προβλήματα των μαθηματικών.

Η σημασία της Εικασίας του Riemann συνδέεται με τη γενικότερη άποψη του Hardy ότι τα βαθύτερα μαθηματικά προβλήματα συχνά χαρακτηρίζονται από απλή διατύπωση και εξαιρετικά δύσκολη απόδειξη. Παρότι η εικασία διατυπώνεται με μία μόνο πρόταση, οι συνέπειές της επεκτείνονται σε ολόκληρη τη θεωρία αριθμών και εξακολουθούν να καθοδηγούν τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα (Hardy, 2012).

Η Εικασία του Riemann δεν είναι απλώς ένα ακόμη άλυτο πρόβλημα, αλλά θεωρείται από πολλούς ως το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας αριθμών. Σε αντίθεση με το θεώρημα του Fermat, το οποίο τελικά αποδείχθηκε, και την εικασία του Goldbach, η οποία αφορά μια συγκεκριμένη ιδιότητα των ακεραίων, η εικασία του Riemann αγγίζει τη συνολική δομή των πρώτων αριθμών. Η επίλυσή της θα επηρέαζε άμεσα πλήθος θεωρημάτων και αποτελεσμάτων, πολλά από τα οποία σήμερα ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι η εικασία είναι αληθής (Vega, 2021).

Η σημασία των πρώτων αριθμών δεν είναι μόνο θεωρητική. Στη σύγχρονη εποχή, οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν θεμέλιο της κρυπτογραφίας και της ασφάλειας των ψηφιακών επικοινωνιών. Αλγόριθμοι κρυπτογράφησης βασίζονται στη δυσκολία παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών, γεγονός που καθιστά την αναζήτηση και τη μελέτη μεγάλων πρώτων εξαιρετικά σημαντική. Με τη βοήθεια υπολογιστών, ο άνθρωπος έχει καταφέρει να εντοπίσει πρώτους αριθμούς με εκατομμύρια ψηφία, χωρίς όμως αυτό να συνοδεύεται από ουσιαστική κατανόηση της γενικής τους κατανομής.

Σήμερα, η Εικασία του Riemann παραμένει άλυτη και αποτελεί ένα από τα Millennium Prize Problems, επιβεβαιώνοντας την κεντρική της θέση στη σύγχρονη μαθηματική έρευνα. Η επίμονη αντίστασή της στη λύση δείχνει ότι το πρόβλημα της κατανομής των πρώτων αριθμών δεν είναι απλώς τεχνικό, αλλά αγγίζει τα βαθύτερα όρια της μαθηματικής γνώσης. Με αυτή την έννοια, η εικασία του Riemann αποτελεί ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα άλυτου προβλήματος: ένα ερώτημα απλό στη διατύπωσή του σε γενικές γραμμές, αλλά εξαιρετικά βαθύ στις συνέπειες και στις απαιτήσεις της απόδειξής του.

2.2.5 Η υπόθεση του συνεχούς

Το 1ο πρόβλημα που έθεσε ο David Hilbert στο Συνέδριο του Παρισιού το 1900 δεν ήταν τυχαίο. Η Υπόθεση του Συνεχούς αφορούσε την ίδια τη φύση του απείρου και τη δομή των συνόλων, δηλαδή τα θεμέλια πάνω στα οποία οικοδομείται ολόκληρο το μαθηματικό οικοδόμημα. Το ερώτημα που διατύπωσε ο Hilbert ήταν αν υπάρχει ή όχι ένα σύνολο με πληθικότητα αυστηρά ανάμεσα στην πληθικότητα των φυσικών αριθμών και εκείνη των πραγματικών αριθμών. Με άλλα λόγια, αν το άπειρο εμφανίζεται σε «διαβαθμίσεις» ή αν υπάρχει ένα επόμενο άμεσο επίπεδο απείρου μετά το αριθμήσιμο (Powell, 2025).

Η υπόθεση αυτή είχε διατυπωθεί αρχικά από τον Georg Cantor, ιδρυτή της θεωρίας συνόλων, ο οποίος εισήγαγε την έννοια των πληθικотήτων και απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι «μεγαλύτερο» άπειρο από το σύνολο των φυσικών. Ο Cantor υπέθεσε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο άπειρο, χωρίς όμως να μπορέσει να το αποδείξει. Η

Υπόθεση του Συνεχούς έγινε έτσι το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας συνόλων και, κατ' επέκταση, των θεμελίων των μαθηματικών (Woodin, 2001).

Στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα, η ανάγκη θεμελίωσης των μαθηματικών με απόλυτη αυστηρότητα έγινε επιτακτική. Οι αντιφάσεις που είχαν εμφανιστεί στη θεωρία συνόλων, όπως τα γνωστά παράδοξα, έδειχναν ότι η διαισθητική χρήση του απείρου μπορούσε να οδηγήσει σε λογικές ασυνέπειες. Σε αυτό το πλαίσιο, ο Bertrand Russell, σε συνεργασία με τον Alfred North Whitehead, επιχείρησαν μια φιλόδοξη προσπάθεια πλήρους τυποποίησης των μαθηματικών. Το έργο τους *Principia Mathematica* στόχευε στο να αποδείξει ότι όλα τα μαθηματικά μπορούν να θεμελιωθούν αποκλειστικά στη λογική, μέσω ενός αυστηρού αξιωματικού και τυπικού συστήματος (Kanamori, 2003).

Την ίδια περίοδο, ο Hilbert ανέπτυξε το δικό του πρόγραμμα θεμελίωσης. Πίστευε ότι είναι δυνατόν να αποδειχθεί η συνέπεια, η πληρότητα και η αποφασισιμότητα των μαθηματικών, δηλαδή ότι κάθε σωστή μαθηματική πρόταση μπορεί, τουλάχιστον θεωρητικά, να αποδειχθεί μέσα σε ένα πεπερασμένο και αυστηρό αξιωματικό σύστημα. Σε αυτό το όραμα, η Υπόθεση του Συνεχούς αποτελούσε το απόλυτο τεστ: ένα σαφές, καλά διατυπωμένο ερώτημα που αναμενόταν να έχει ξεκάθαρη απάντηση (Zach, 2001).

Η κρίση των θεμελίων που κορυφώθηκε στις αρχές του 20ού αιώνα έφερε στο προσκήνιο δύο κεντρικές έννοιες: τη συνέπεια και την πληρότητα ενός αξιωματικού συστήματος. Οι έννοιες αυτές είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση τόσο της Υπόθεσης του Συνεχούς όσο και των θεωρημάτων του Gödel.

Ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται συνεπές όταν δεν οδηγεί σε αντιφάσεις, δηλαδή όταν δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί ταυτόχρονα μια πρόταση και η άρνησή της. Η συνέπεια αποτελεί ελάχιστη προϋπόθεση για τη μαθηματική εγκυρότητα: σε ένα ασυνεπές σύστημα, κάθε πρόταση μπορεί να αποδειχθεί, γεγονός που καθιστά τη θεωρία άνευ νοήματος. Για τον Hilbert, η απόδειξη της συνέπειας των μαθηματικών αποτελούσε κεντρικό στόχο του προγράμματός του.

Αντίθετα, ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται πλήρες όταν κάθε αληθής πρόταση που διατυπώνεται στη γλώσσα του μπορεί να αποδειχθεί εντός του συστήματος. Με απλά λόγια, η πληρότητα εκφράζει την ιδέα ότι το σύστημα είναι «αρκετό» για να απαντήσει σε όλα τα ερωτήματα που θέτει. Η πληρότητα συνδεόταν με την αισιοδοξία ότι, με τα κατάλληλα αξιώματα, όλα τα μαθηματικά προβλήματα είναι κατ' αρχήν επιλύσιμα.

Τα θεωρήματα μη πληρότητας του Kurt Gödel έδειξαν ότι αυτές οι δύο ιδιότητες δεν μπορούν να συνυπάρχουν με τον τρόπο που φανταζόταν ο Hilbert. Κάθε συνεπές και επαρκώς ισχυρό σύστημα που περιλαμβάνει την αριθμητική είναι αναγκαστικά μη πλήρες: υπάρχουν

αληθείς προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχθούν μέσα σε αυτό. Το αποτέλεσμα αυτό άλλαξε ριζικά τη φιλοσοφική εικόνα των μαθηματικών, διαχωρίζοντας οριστικά την έννοια της αλήθειας από την έννοια της αποδειξιμότητας.

Η διάκριση αυτή έχει βαθιές συνέπειες. Δείχνει ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα κλειστό σύστημα απόλυτων βεβαιοτήτων, αλλά μια δυναμική επιστημονική δραστηριότητα, στην οποία τα όρια της γνώσης καθορίζονται από τις αξιωματικές επιλογές μας. Με αυτή την έννοια, η συζήτηση γύρω από τη συνέπεια και την πληρότητα δεν αφορά μόνο τεχνικά ζητήματα λογικής, αλλά αγγίζει τον ίδιο τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τη φύση της μαθηματικής γνώσης.

Η εικόνα αυτή άλλαξε ριζικά με το έργο του Kurt Gödel. Το 1931, ο Gödel απέδειξε τα περίφημα Θεωρήματα Μη Πληρότητας, τα οποία έδειξαν ότι κάθε συνεπές και επαρκώς ισχυρό αξιωματικό σύστημα που περιλαμβάνει την αριθμητική περιέχει αληθείς προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχθούν μέσα στο ίδιο το σύστημα. Το αποτέλεσμα αυτό αποτέλεσε ισχυρό πλήγμα στο πρόγραμμα του Hilbert και έδειξε ότι η φιλοδοξία για απόλυτη θεμελίωση των μαθηματικών ήταν ανέφικτη.

Η σχέση των θεωρημάτων του Gödel με την Υπόθεση του Συνεχούς έγινε ακόμη πιο σαφής λίγα χρόνια αργότερα. Ο ίδιος ο Gödel απέδειξε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί να διαψευστεί από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας συνόλων (ZFC), ενώ το 1963 ο Paul Cohen απέδειξε ότι δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί. Το συμπέρασμα ήταν συγκλονιστικό: η Υπόθεση του Συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τα καθιερωμένα αξιώματα των μαθηματικών. Η ανεξαρτησία αυτή είχε τεράστιες συνέπειες. Για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών έγινε σαφές ότι υπάρχουν προβλήματα που δεν είναι απλώς άλυτα λόγω τεχνικής δυσκολίας, αλλά μη αποδείξιμα μέσα σε ένα δεδομένο αξιωματικό πλαίσιο. Το ερώτημα μετατοπίστηκε από το «ποια είναι η σωστή απάντηση» στο «μέσα σε ποιο σύστημα μπορούμε να μιλήσουμε για απάντηση».

Η αλήθεια και η αποδειξιμότητα έπαψαν να ταυτίζονται απόλυτα. Από επιστημολογική σκοπιά, η Υπόθεση του Συνεχούς και τα θεωρήματα του Gödel άλλαξαν ριζικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά δεν εμφανίζονται πλέον ως ένα κλειστό, πλήρως καθορισμένο σύστημα αληθειών, αλλά ως μια δυναμική δομή, όπου τα όρια της γνώσης εξαρτώνται από τις αξιωματικές επιλογές που κάνουμε. Το ερώτημα «τι μπορεί να αποδειχθεί» γίνεται εξίσου σημαντικό με το «τι είναι αληθές». Με αυτή την έννοια, το πρώτο πρόβλημα του Hilbert δεν απέτυχε· αντίθετα, αποκάλυψε τα βαθύτερα όρια της μαθηματικής σκέψης. Η Υπόθεση του Συνεχούς αποτέλεσε το σημείο όπου τα μαθηματικά συνάντησαν τα ίδια τους τα θεμέλια και αναγκάστηκαν να αναστοχαστούν τη φύση τους. Η συζήτηση αυτή

δεν είναι μόνο μαθηματική, αλλά και φιλοσοφική, και παραμένει έως σήμερα κεντρική για την κατανόηση του τι σημαίνει γνώση, απόδειξη και αλήθεια στα μαθηματικά.

2.2.6 Η Εικασία του Poincaré

Η Εικασία του Poincaré συνδέεται άρρηκτα με το έργο και την προσωπικότητα του Henri Poincaré. Ο Henri Poincaré (1854–1912) υπήρξε μία από τις πιο πολυδιάστατες και δημιουργικές μορφές στην ιστορία των μαθηματικών. Το έργο του εκτείνεται σε ένα εντυπωσιακά ευρύ φάσμα περιοχών, όπως η τοπολογία, η θεωρία διαφορικών εξισώσεων, η ουράνια μηχανική, η μαθηματική φυσική και η φιλοσοφία της επιστήμης. Συχνά χαρακτηρίζεται ως ο τελευταίος «καθολικός» μαθηματικός, με την έννοια ότι μπορούσε να συνεισφέρει ουσιαστικά σε πολλούς διαφορετικούς κλάδους, σε μια εποχή όπου η επιστήμη άρχιζε ήδη να εξειδικεύεται έντονα.

Η πιο καθοριστική συνεισφορά του Poincaré βρίσκεται στη θεμελίωση της τοπολογίας ως αυτόνομου κλάδου των μαθηματικών. Ο ίδιος εισήγαγε βασικές έννοιες, όπως η θεμελιώδης ομάδα, και έθεσε τα θεμέλια για τη μελέτη των χώρων μέσω των ιδιοτήτων που διατηρούνται κάτω από συνεχείς παραμορφώσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, διατύπωσε το 1904 την περίφημη Εικασία του Poincaré, η οποία αποτέλεσε σημείο αναφοράς για την τοπολογία του 20ού αιώνα και οδήγησε, έναν αιώνα αργότερα, στην ανάπτυξη νέων γεωμετρικών και αναλυτικών εργαλείων.

Παράλληλα, ο Poincaré διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και των δυναμικών συστημάτων. Μελετώντας προβλήματα της ουράνιας μηχανικής, ανακάλυψε ότι ακόμη και συστήματα που διέπονται από ντετερμινιστικούς νόμους μπορούν να παρουσιάζουν εξαιρετικά πολύπλοκη και απρόβλεπτη συμπεριφορά. Οι ιδέες του αυτές θεωρούνται σήμερα πρόδρομοι της θεωρίας του χάους και άλλαξαν ριζικά την αντίληψη για τη σχέση αιτιότητας και προβλεψιμότητας στα μαθηματικά και τη φυσική. Σημαντική είναι επίσης η συμβολή του στη μαθηματική φυσική, όπου εργάστηκε σε θέματα ηλεκτρομαγνητισμού, σχετικότητας και θεωρίας δυναμικού. Αν και δεν διατύπωσε ο ίδιος τη θεωρία της σχετικότητας, οι ιδέες του για τον χώρο, τον χρόνο και τη συμβατικότητα των φυσικών νόμων επηρέασαν βαθιά το επιστημονικό περιβάλλον μέσα στο οποίο αναπτύχθηκε η σύγχρονη φυσική. Πέρα από το καθαρά μαθηματικό του έργο, ο Poincaré υπήρξε και σημαντικός φιλόσοφος της επιστήμης. Στα φιλοσοφικά του κείμενα υποστήριξε ότι οι επιστημονικές θεωρίες δεν είναι απλές ανακαλύψεις μιας αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά κατασκευές του ανθρώπινου νου, βασισμένες σε συμβάσεις που επιλέγονται για λόγους απλότητας και αποτελεσματικότητας. Η θέση αυτή, γνωστή ως επιστημονικός συμβατισμός,

επηρέασε βαθιά τη φιλοσοφία των μαθηματικών και ανέδειξε τον δημιουργικό ρόλο του επιστήμονα.

Η σημασία του έργου του Poincaré έγκειται όχι μόνο στα επιμέρους αποτελέσματά του, αλλά κυρίως στον τρόπο σκέψης που εισήγαγε. Ανέδειξε τη σημασία της γεωμετρικής διαίσθησης, της ποιοτικής ανάλυσης και της σύνθεσης διαφορετικών μαθηματικών εργαλείων. Ταυτόχρονα, έδειξε ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα κλειστό σύστημα τύπων και αλγορίθμων, αλλά μια ζωντανή επιστήμη, στην οποία η δημιουργικότητα και η φαντασία παίζουν καθοριστικό ρόλο.

Στο πλαίσιο της ιστορίας των άλυτων προβλημάτων, ο Poincaré αποτελεί εμβληματική μορφή: διατύπωσε προβλήματα που ξεπέρασαν τη δική του εποχή και οδήγησαν σε βαθιές θεωρητικές εξελίξεις πολύ αργότερα. Το έργο του αποδεικνύει ότι η αξία ενός μαθηματικού δεν μετριέται μόνο από τις λύσεις που δίνει, αλλά και από τα ερωτήματα που θέτει και τους νέους δρόμους που ανοίγει για τη μαθηματική σκέψη.

Η Εικασία του Poincaré διατυπώθηκε το 1904 και αφορά την ταξινόμηση των τρισδιάστατων χώρων. Σε απλουστευμένη μορφή, η εικασία λέει ότι κάθε τρισδιάστατη πολλαπλότητα που είναι κλειστή, συνεκτική και χωρίς «τρύπες», είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την τρισδιάστατη σφαίρα. Με πιο διαισθητικούς όρους, αν ένας τρισδιάστατος χώρος έχει την ιδιότητα ότι κάθε κλειστή καμπύλη μπορεί να συρρικνωθεί συνεχώς σε ένα σημείο, τότε ο χώρος αυτός δεν διαφέρει ουσιαστικά από τη συνηθισμένη σφαίρα.

Η φαινομενικά απλή αυτή διατύπωση έκρυβε τεράστια δυσκολία. Σε δύο διαστάσεις, το αντίστοιχο πρόβλημα είναι σχετικά απλό και μπορεί να αντιμετωπιστεί με κλασικά εργαλεία. Στις τρεις διαστάσεις όμως, η τοπολογία αποδεικνύεται εξαιρετικά περίπλοκη. Οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν σύντομα ότι η κατανόηση των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων απαιτούσε εντελώς νέα εργαλεία, και η Εικασία του Poincaré μετατράπηκε σταδιακά σε σύμβολο της δυσκολίας της τοπολογίας υψηλών διαστάσεων.

Κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, η εικασία απέκτησε μυθικές διαστάσεις. Παρά τις σημαντικές προόδους στην τοπολογία και τη γεωμετρία, το πρόβλημα αντιστεκόταν πεισματικά σε κάθε προσπάθεια επίλυσης. Μάλιστα, πολλοί θεωρούσαν ότι η πλήρης απόδειξή της ίσως να απαιτούσε ιδέες τόσο ριζικά νέες, ώστε να παραμείνει άλυτη για απροσδιόριστο χρονικό διάστημα. Η δυσκολία της δεν ήταν απλώς τεχνική, αλλά εννοιολογική: έλειπε ένα γενικό πλαίσιο για την «απλοποίηση» των τρισδιάστατων χώρων.

Η καθοριστική στροφή ήρθε στα τέλη του 20ού αιώνα, με την εισαγωγή γεωμετρικών μεθόδων στην τοπολογία. Κεντρικό ρόλο έπαιξε η ροή Ricci, μια διαδικασία που επιτρέπει τη

συνεχή «εξομάλυνση» της γεωμετρίας ενός χώρου. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε αρχικά από τον Hamilton, αλλά η πλήρης αξιοποίησή της αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολη.

Η απόδειξη της Εικασίας του Poincaré από τον Grigori Perelman αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα των μαθηματικών του 21ου αιώνα. Δεν πρόκειται απλώς για την επίλυση ενός μεμονωμένου προβλήματος τοπολογίας, αλλά για την κορύφωση μιας μακρόχρονης θεωρητικής πορείας που συνδυάζει γεωμετρία, ανάλυση και δυναμικά συστήματα. Η συμβολή του Perelman έγκειται τόσο στις νέες ιδέες που εισήγαγε όσο και στον τρόπο με τον οποίο ενοποίησε και ολοκλήρωσε το πρόγραμμα που είχε ξεκινήσει ο Richard Hamilton δεκαετίες νωρίτερα.

Η Εικασία του Henri Poincaré αφορά την τοπολογική ταξινόμηση τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων και, σε απλοποιημένη μορφή, διατυπώνει ότι κάθε κλειστή, απλά συνεκτική τρισδιάστατη πολλαπλότητα είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τη σφαίρα. Παρά την απλή διατύπωσή της, η εικασία αντιστάθηκε σε όλες τις κλασικές μεθόδους τοπολογίας για σχεδόν έναν αιώνα, γεγονός που κατέστησε σαφές ότι απαιτούνταν ριζικά νέα εργαλεία.

Η καθοριστική ιδέα που οδήγησε στην απόδειξη ήταν η χρήση της ροής Ricci, μιας γεωμετρικής εξέλιξης που εισήγαγε ο Hamilton τη δεκαετία του 1980. Η ροή Ricci μπορεί να ιδωθεί ως μια διαδικασία «εξομάλυνσης» της γεωμετρίας μιας πολλαπλότητας, κατά την οποία η καμπυλότητα εξελίσσεται με τρόπο ανάλογο προς τη διάχυση της θερμότητας. Στο ιδανικό σενάριο, η ροή οδηγεί τη γεωμετρία σε μια κανονική μορφή που αποκαλύπτει την τοπολογική δομή του χώρου.

Ωστόσο, η εφαρμογή της ροής Ricci συνοδεύεται από σοβαρές τεχνικές δυσκολίες, κυρίως λόγω της εμφάνισης ανωμαλιών, δηλαδή σημείων όπου η καμπυλότητα «εκρήγνυται» και η ροή παύει να είναι καλά ορισμένη. Το βασικό πρόβλημα ήταν αν αυτές οι ανωμαλίες μπορούν να ελεγχθούν και να αντιμετωπιστούν με συστηματικό τρόπο, ώστε η διαδικασία να συνεχιστεί.

Η καθοριστική συνεισφορά του Perelman ήταν ακριβώς σε αυτό το σημείο. Εισήγαγε νέες έννοιες και τεχνικές, όπως τη μονοτονία της εντροπίας της ροής Ricci και το θεώρημα μη κατάρρευσης, που επέτρεψαν τον λεπτομερή έλεγχο της γεωμετρίας κοντά στις ανωμαλίες. Με αυτά τα εργαλεία, κατέστη δυνατή η αυστηρή εφαρμογή της διαδικασίας της χειρουργικής, δηλαδή η ελεγχόμενη «τομή» και τροποποίηση της πολλαπλότητας στα σημεία όπου εμφανίζονται ανωμαλίες, χωρίς απώλεια της συνολικής πληροφορίας.

Η διαδικασία αυτή επέτρεψε στον Perelman να δείξει ότι, μετά από πεπερασμένο αριθμό τέτοιων επεμβάσεων, η γεωμετρία της πολλαπλότητας απλοποιείται σταδιακά και αποκαλύπτει την τοπολογική της δομή. Στην περίπτωση της απλά συνεκτικής τρισδιάστατης

πολλαπλότητας, η διαδικασία οδηγεί αναπόφευκτα στη σφαίρα, επιβεβαιώνοντας την Εικασία του Poincaré.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι ο Perelman δεν δημοσίευσε την απόδειξή του με τον παραδοσιακό τρόπο, αλλά ανάρτησε τρία εκτενή προδημοσιεύματα, τα οποία περιείχαν τις βασικές ιδέες και τα κρίσιμα επιχειρήματα, χωρίς όμως όλες τις ενδιάμεσες λεπτομέρειες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μια πολυετή διεθνή προσπάθεια ελέγχου, συμπλήρωσης και επεξεργασίας της απόδειξης από την παγκόσμια μαθηματική κοινότητα. Η διαδικασία αυτή κατέληξε στην πλήρη επιβεβαίωση της ορθότητας του έργου του Perelman και ανέδειξε τον συλλογικό χαρακτήρα της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας. Η απόδειξη της Εικασίας του Poincaré από τον Perelman δεν αποτελεί μόνο τεχνικό θρίαμβο, αλλά και βαθιά επιστημολογική τομή. Δείχνει ότι η επίλυση ενός θεμελιώδους προβλήματος μπορεί να απαιτεί τη σύνθεση διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών και τη δημιουργία νέων εννοιών. Παράλληλα, αναδεικνύει ότι η μαθηματική πρόοδος δεν είναι γραμμική, αλλά συχνά προκύπτει μέσα από μακροχρόνια προγράμματα, τα οποία ολοκληρώνονται από μεμονωμένες, εξαιρετικά δημιουργικές συνεισφορές.

η απόδειξη του Perelman αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του πώς ένα πρόβλημα που θεωρούνταν σχεδόν απρόσιτο μπορεί τελικά να επιλυθεί, όχι με απλοποίηση, αλλά με εμβάθυνση. Δείχνει ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται μέσω της αναζήτησης νέων οπτικών και ότι ακόμη και τα πιο αφηρημένα ερωτήματα μπορούν να οδηγήσουν σε ουσιαστική κατανόηση της δομής του κόσμου.

Η πορεία της Εικασίας του Poincaré αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο ένα άλυτο πρόβλημα μπορεί να καθοδηγήσει την ανάπτυξη ολόκληρων μαθηματικών κλάδων. Η τελική λύση δεν προέκυψε από μία μεμονωμένη ιδέα, αλλά από τη συσσώρευση γνώσεων και τεχνικών που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια σχεδόν ενός αιώνα έρευνας. Έτσι, η ιστορία της εικασίας αναδεικνύει τον δημιουργικό ρόλο που διαδραματίζουν τα άλυτα προβλήματα στην εξέλιξη των μαθηματικών. Η Εικασία του Πουανκαρέ συμπεριλήφθηκε το 2000 στη λίστα των Millennium Prize Problems του Clay Mathematics Institute και αποτέλεσε το μοναδικό πρόβλημα της λίστας που έχει μέχρι σήμερα επιλυθεί πλήρως, με την απόδειξη του Grigori Perelman.

2.2.7 Το πρόβλημα P vs NP

Το πρόβλημα P vs NP αποτελεί ένα από τα πιο θεμελιώδη και σύγχρονα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών και της θεωρητικής πληροφορικής. Σε αντίθεση με τα κλασικά άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών ή της γεωμετρίας, το P vs NP δεν αφορά άμεσα αριθμούς ή

σχήματα, αλλά τη φύση της υπολογιστικής διαδικασίας και τα όρια της αποδοτικής επίλυσης προβλημάτων. Το ερώτημα που θέτει είναι απλό στη διατύπωση, αλλά βαθύ στις συνέπειές του: είναι όλα τα προβλήματα των οποίων η λύση μπορεί να επαληθευτεί γρήγορα και προβλήματα που μπορούν και να λυθούν γρήγορα;

Για να κατανοηθεί το πρόβλημα, είναι απαραίτητο να διευκρινιστούν οι έννοιες των κλάσεων P και NP. Η κλάση P περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν από έναν αλγόριθμο σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή σε χρόνο που αυξάνεται ως πολυώνυμο του μεγέθους των δεδομένων εισόδου. Τέτοια προβλήματα θεωρούνται πρακτικά επιλύσιμα, ακόμη και για μεγάλες εισόδους. Αντίθετα, η κλάση NP περιλαμβάνει προβλήματα για τα οποία, αν δοθεί μια υποψήφια λύση, μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητά της σε πολυωνυμικό χρόνο, ακόμη κι αν δεν γνωρίζουμε πώς να τη βρούμε αποδοτικά.

Η ουσία του προβλήματος P vs NP συνοψίζεται στο ερώτημα αν οι δύο αυτές κλάσεις συμπίπτουν. Είναι προφανές ότι κάθε πρόβλημα της κλάσης P ανήκει και στην NP, αφού αν μπορούμε να βρούμε γρήγορα μια λύση, μπορούμε και να την ελέγξουμε γρήγορα. Το ανοιχτό ερώτημα είναι αν ισχύει και το αντίστροφο: αν κάθε πρόβλημα του οποίου η λύση επαληθεύεται γρήγορα μπορεί και να επιλυθεί γρήγορα. Αν η απάντηση είναι θετική, τότε $P = NP$ · αν είναι αρνητική, τότε $P \neq NP$.

Η σημασία του προβλήματος έγινε ιδιαίτερα εμφανής τη δεκαετία του 1970, με την εισαγωγή της έννοιας των NP-πλήρων προβλημάτων από τον Stephen Cook και τον Richard Karp. Τα NP-πλήρη προβλήματα αποτελούν την «καρδιά» της κλάσης NP: αν έστω και ένα από αυτά αποδειχθεί ότι ανήκει στην P, τότε όλα τα προβλήματα της NP είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο και συνεπώς $P = NP$. Αντίθετα, αν αποδειχθεί ότι κάποιο NP-πλήρες πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί αποδοτικά, τότε $P \neq NP$.

Από τη διατύπωσή του στις αρχές της δεκαετίας του 1970, το πρόβλημα P έναντι NP έχει αποτελέσει ένα από τα σημαντικότερα ανοιχτά ερωτήματα της θεωρητικής πληροφορικής και των σύγχρονων μαθηματικών. Η δυσκολία του δεν οφείλεται στη διατύπωσή του, αλλά στη βαθιά σύνδεσή του με τη φύση του υπολογισμού, της απόδειξης και της αλγοριθμικής πολυπλοκότητας.

Η πρώτη λοιπόν σημαντική πρόοδος σημειώθηκε με το έργο του Stephen Cook το 1971, ο οποίος απέδειξε ότι το πρόβλημα της λογικής ικανοποιησιμότητας (SAT) είναι NP-πλήρες. Λίγο αργότερα, ο Richard Karp παρουσίασε μια μεγάλη οικογένεια προβλημάτων που αποδείχθηκαν επίσης NP-πλήρη. Τα αποτελέσματα αυτά έδειξαν ότι πολλά διαφορετικά προβλήματα μπορούν να θεωρηθούν ουσιαστικά ισοδύναμα ως προς τη δυσκολία τους και δημιούργησαν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εξελίσσεται η έρευνα μέχρι σήμερα.

Κατά τις επόμενες δεκαετίες, οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες υπολογιστών προσπάθησαν να αποδείξουν είτε ότι $P = NP$ είτε ότι $P \neq NP$. Ωστόσο, η προσπάθεια αυτή συνάντησε σημαντικά εμπόδια. Πολλές τεχνικές που αρχικά θεωρήθηκαν ελπιδοφόρες αποδείχθηκαν ανεπαρκείς, καθώς αποδείχθηκε ότι δεν μπορούν να επιλύσουν το πρόβλημα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστά ως «φραγμοί» (barriers) στην έρευνα της υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

Ιδιαίτερα σημαντικό υπήρξε το αποτέλεσμα των Baker, Gill και Solovay το 1975, το οποίο έδειξε ότι μια μεγάλη κατηγορία αποδείξεων δεν μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα P έναντι NP . Αργότερα, οι Razborov και Rudich εισήγαγαν το επιχείρημα των «φυσικών αποδείξεων» (natural proofs), δείχνοντας ότι πολλές γνωστές τεχνικές είναι ανεπαρκείς για την απόδειξη του $P \neq NP$. Τα αποτελέσματα αυτά δεν έλυσαν το πρόβλημα, αλλά συνέβαλαν στην κατανόηση του γιατί παραμένει τόσο δύσκολο.

Παρά την απουσία οριστικής λύσης, η έρευνα γύρω από το πρόβλημα έχει οδηγήσει σε σημαντική πρόοδο στη θεωρία αλγορίθμων, στην κρυπτογραφία, στη συνδυαστική και στη θεωρία πολυπλοκότητας. Πολλοί ερευνητές θεωρούν πιθανότερο ότι $P \neq NP$, ωστόσο μέχρι σήμερα δεν υπάρχει απόδειξη που να επιβεβαιώνει ή να διαψεύδει οριστικά αυτή την άποψη. Για τον λόγο αυτό, το πρόβλημα εξακολουθεί να αποτελεί ένα από τα επτά Millennium Prize Problems του Clay Mathematics Institute και θεωρείται από πολλούς το σημαντικότερο ανοιχτό πρόβλημα της θεωρητικής πληροφορικής.

Η πλειονότητα των ειδικών θεωρεί ότι $P \neq NP$, ωστόσο μέχρι σήμερα δεν υπάρχει απόδειξη προς καμία κατεύθυνση. Η δυσκολία του προβλήματος δεν είναι τεχνική, αλλά εννοιολογική: απαιτεί μια βαθιά κατανόηση του τι σημαίνει υπολογιστική δυσκολία και ποια είναι τα εγγενή όρια των αλγορίθμων. Το P vs NP δεν είναι απλώς ένα πρόβλημα της πληροφορικής, αλλά ένα ερώτημα για το τι μπορεί να επιλυθεί με αποδοτικό τρόπο στον φυσικό κόσμο.

Οι συνέπειες μιας ενδεχόμενης λύσης θα ήταν τεράστιες. Αν αποδειχθεί ότι $P = NP$, τότε πλήθος προβλημάτων που σήμερα θεωρούνται πρακτικά άλυτα θα μπορούσαν να επιλυθούν γρήγορα, με δραματικές επιπτώσεις στην κρυπτογραφία, τη βελτιστοποίηση, την τεχνητή νοημοσύνη και τη βιοπληροφορική. Αντίθετα, αν αποδειχθεί ότι $P \neq NP$, τότε θα έχει τεθεί ένα θεμελιώδες όριο στη δυνατότητα της αποδοτικής υπολογιστικής επίλυσης, επιβεβαιώνοντας ότι υπάρχουν προβλήματα των οποίων η λύση, αν και ελέγξιμη, είναι εγγενώς δύσκολο να βρεθεί. Από επιστημολογική και διδακτική σκοπιά, το πρόβλημα P vs NP παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Η διατύπωσή του μπορεί να γίνει με απλά παραδείγματα της καθημερινότητας, όπως παζλ, δρομολόγηση ή παιχνίδια, γεγονός που το καθιστά προσβάσιμο ακόμη και σε

μαθητές/μαθήτριες . Ταυτόχρονα, αναδεικνύει μια βαθιά διάκριση ανάμεσα στο «γνωρίζω ότι μια λύση είναι σωστή» και στο «μπορώ να τη βρω», προσφέροντας ένα σύγχρονο παράδειγμα των ορίων της μαθηματικής και υπολογιστικής γνώσης. Το P vs NP συγκαταλέγεται στα Millennium Prize Problems και θεωρείται ο σύγχρονος αντίστοιχος των μεγάλων άλυτων προβλημάτων του παρελθόντος. Όπως η Υπόθεση του Συνεχούς ή η Εικασία του Riemann, δεν αποτελεί απλώς ένα τεχνικό ερώτημα, αλλά έναν καθρέφτη των ορίων της ανθρώπινης σκέψης. Μέσα από αυτό, τα μαθηματικά και η πληροφορική συναντώνται για να απαντήσουν σε ένα κοινό, θεμελιώδες ερώτημα: όχι μόνο τι μπορούμε να γνωρίζουμε, αλλά και τι μπορούμε να υπολογίσουμε.

Κεφάλαιο 3^ο Η διδακτική αξιοποίηση των άλυτων προβλημάτων στα μαθηματικά, από την θεωρία στην πράξη

3.1 Η σημασία των άλυτων προβλημάτων στη σύγχρονη εκπαίδευση

Όσο σημαντικά είναι τα μαθηματικά, άλλο τόσο σημαντική είναι και η μεταλαμπάδευσή τους στις νεότερες γενιές. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο, ανά τους αιώνες, έχουν αναπτυχθεί διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα που αποσκοπούν στην καλύτερη δυνατή μέθοδο αφομοίωσης των μαθηματικών (Ernest, 1998).

Η διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία δεν υπήρξε ποτέ φιλοσοφικά ουδέτερη. Από την αρχαιότητα έως τη σύγχρονη εποχή, η αντίληψη για το τι είναι τα μαθηματικά, πώς παράγεται η γνώση και ποιος είναι ο ρόλος του μαθητή καθορίστηκε από διαφορετικά φιλοσοφικά ρεύματα, τα οποία επηρέασαν άμεσα τη μαθηματική εκπαίδευση (Shapiro, 2000).

Στην αρχαία ελληνική σκέψη, κυριαρχεί η πλατωνική αντίληψη, όπως εκφράζεται από τον Πλάτωνα. Τα μαθηματικά θεωρούνται αιώνιες, αμετάβλητες αλήθειες που υπάρχουν ανεξάρτητα από τον άνθρωπο, και η εκπαίδευση έχει ως στόχο την ανάμνηση αυτών των ιδεατών αντικειμένων μέσω της λογικής σκέψης. Η έμφαση δίνεται στην απόδειξη, στη θεωρητική αυστηρότητα και στην καλλιέργεια του νου. Παράλληλα, ο Αριστοτέλης εισάγει μια πιο εμπειρική και αναλυτική προσέγγιση, αναγνωρίζοντας τη σημασία της λογικής δομής αλλά και της σταδιακής οικοδόμησης της γνώσης.

Κατά τον Μεσαίωνα, τα μαθηματικά εντάσσονται στο πλαίσιο της σχολαστικής φιλοσοφίας και αντιμετωπίζονται κυρίως ως εργαλείο λογικής πειθαρχίας. Η διδασκαλία έχει αυθεντία, με περιορισμένο χώρο για αμφισβήτηση ή δημιουργικότητα, και η γνώση μεταδίδεται κυρίως ως κλειστό σώμα αληθειών.

Οι σύγχρονοι μαθητές/μαθήτριες /τριες συχνά δυσκολεύονται με τα μαθηματικά, δεν κατανοούν τη χρησιμότητά τους και, ως εκ τούτου, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να βρεθούν τρόποι ώστε να κινητοποιηθεί το ενδιαφέρον τους για αυτά. Πολλοί μαθητές/μαθήτριες θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι στατικά, ότι είναι «αυτά που είναι» από πάντα.

Η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο συνοδεύεται συχνά από δυσκολίες που δεν σχετίζονται αποκλειστικά με το γνωστικό περιεχόμενο, αλλά και με τη φύση της ίδιας της μαθηματικής γλώσσας. Τα μαθηματικά αποτελούν μια αυστηρή, τυπική και συμβολική γλώσσα, η οποία απαιτεί υψηλό βαθμό συγκέντρωσης, αφαιρετικής σκέψης και επιμονής. Για πολλούς μαθητές/μαθήτριες, αυτή η απαίτηση δημιουργεί απόσταση, αίσθημα κόπωσης ή ακόμη και αποξένωση από το μάθημα, ιδιαίτερα όταν η διδασκαλία περιορίζεται στην τεχνική εκτέλεση ασκήσεων και στην αναπαραγωγή τύπων.

Σε αυτό το πλαίσιο, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως ιδιαίτερα αποτελεσματικό διδακτικό εργαλείο. Η ιστορική αφήγηση προσφέρει στον εκπαιδευτικό τη δυνατότητα να μετατοπίσει προσωρινά το βάρος από την τεχνική δυσκολία στη νοηματοδότηση, δημιουργώντας ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να συνδεθούν συναισθηματικά και πνευματικά με το αντικείμενο. Τα μαθηματικά παύουν να εμφανίζονται ως ένα απρόσωπο σύνολο κανόνων και αποκτούν ανθρώπινη διάσταση, καθώς παρουσιάζονται μέσα από τις ζωές, τις αγωνίες και τις προσπάθειες των ανθρώπων που τα δημιούργησαν

Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη από αφηγήσεις που μπορούν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών: άλυτα προβλήματα που απασχόλησαν γενιές μαθηματικών, έντονες επιστημονικές διαφωνίες, προσωπικές τραγωδίες, αλλά και στιγμές δημιουργικής έκλαμψης. Οι μαθητές/μαθήτριες συχνά ανταποκρίνονται θετικά σε τέτοιες ιστορίες, γιατί αναγνωρίζουν σε αυτές στοιχεία ανθρώπινα και οικεία, όπως η αποτυχία, η επιμονή, η αμφιβολία και το πάθος για γνώση. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, η προσοχή τους κερδίζεται με τρόπο φυσικό και όχι επιβεβλημένο. Η Αναγέννηση φέρνει μία σημαντική μετατόπιση. Με τον Καρτέσιο αναδεικνύεται ο ρόλος της μεθόδου, της αναλυτικής σκέψης και της μαθηματικοποίησης της φύσης. Τα μαθηματικά γίνονται εργαλείο κατανόησης του κόσμου και η εκπαίδευση αρχίζει να δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικασία σκέψης παρά στην απομνημόνευση.

Κατά τον Διαφωτισμό, με κεντρική μορφή τον Immanuel Kant, τα μαθηματικά θεωρούνται προϊόν της ανθρώπινης νόησης, βασισμένα σε εγγενείς δομές του νου. Η μαθηματική γνώση δεν είναι απλή ανακάλυψη εξωτερικών αληθειών, αλλά ενεργή κατασκευή. Η αντίληψη αυτή προετοιμάζει το έδαφος για μεταγενέστερες παιδαγωγικές θεωρίες που δίνουν έμφαση στον ρόλο του μαθητή.

Στον 19ο και στις αρχές του 20ού αιώνα, με την ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου και του φορμαλισμού, όπως εκφράζεται από τον David Hilbert, τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως αυστηρά τυπικά συστήματα. Η εκπαιδευτική συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι η έμφαση στη δομή, στη συμβολική γλώσσα και στην αυστηρότητα, συχνά εις βάρος της κατανόησης και της σύνδεσης με τη μαθησιακή εμπειρία των μαθητών.

Η κρίση των θεμελίων και η εμφάνιση των θεωρημάτων του Gödel κλονίζουν την απόλυτη πίστη στον φορμαλισμό και ανοίγουν τον δρόμο για νέες παιδαγωγικές προσεγγίσεις. Στα μέσα του 20ού αιώνα, αναπτύσσεται ο παιδαγωγικός κονστρουκτιβισμός, σύμφωνα με τον οποίο η μαθηματική γνώση οικοδομείται ενεργά από τον μαθητή μέσα από γνωστικές συγκρούσεις και αναστοχασμό.

Στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση, ιδιαίτερη επιρροή ασκεί η ανθρωποκεντρική και ρεαλιστική προσέγγιση, όπου τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Η έμφαση μετατοπίζεται από το τελικό αποτέλεσμα στη διαδικασία, από την αυστηρή τυπικότητα στη νοηματοδότηση, και από την παθητική μετάδοση στη διερεύνηση και τον διάλογο.

Σήμερα, επικρατεί μια συνθετική αντίληψη: τα μαθηματικά αναγνωρίζονται ταυτόχρονα ως δομημένη επιστήμη και ως ανθρώπινη δημιουργία. Η σύγχρονη διδακτική προσέγγιση δίνει χώρο στην ιστορία των μαθηματικών, στα ανοιχτά προβλήματα, στη διερεύνηση και στη συνειδητοποίηση των ορίων της γνώσης. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, τα άλυστα προβλήματα αποκτούν ιδιαίτερη παιδαγωγική αξία, καθώς λειτουργούν ως γέφυρα ανάμεσα στη μαθηματική αυστηρότητα και στη φιλοσοφική αναζήτηση, συμβάλλοντας ουσιαστικά στην καλλιέργεια βαθύτερης σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά.

Ιδιαίτερη παιδαγωγική αξία έχουν οι ιστορίες γύρω από άλυστα προβλήματα των μαθηματικών. Τα προβλήματα αυτά δείχνουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια ολοκληρωμένη επιστήμη με έτοιμες απαντήσεις, αλλά μια δυναμική ανθρώπινη δραστηριότητα που εξελίσσεται μέσα στον χρόνο. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι ακόμη και τα πιο απλά στη διατύπωση ερωτήματα μπορούν να παραμείνουν ανοιχτά για αιώνες, γεγονός που ενισχύει την περιέργεια και τη φαντασία τους. Παράλληλα, καλλιεργείται η κατανόηση ότι η δυσκολία δεν αποτελεί ένδειξη ανικανότητας, αλλά φυσικό μέρος της μαθηματικής δημιουργίας. (Davis & Hersh, 1981).

Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών επιτρέπει επίσης στον εκπαιδευτικό να χτίσει γέφυρες ανάμεσα στο παρελθόν και το παρόν. Μέσα από τη σύνδεση ιστορικών προβλημάτων με σύγχρονες εφαρμογές ή με ερωτήματα που παραμένουν ανοιχτά, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι τα μαθηματικά δεν είναι αποκομμένα από τον σύγχρονο κόσμο. Αντίθετα, αποτελούν μια ζωντανή επιστήμη, η οποία συνεχίζει να εξελίσσεται και να επηρεάζει την καθημερινή ζωή.

Τελικά, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως ισχυρός καταλύτης για τη μαθησιακή διαδικασία. Δεν αντικαθιστά τη συστηματική διδασκαλία των εννοιών και των μεθόδων, αλλά τη συμπληρώνει και τη στηρίζει, δημιουργώντας ένα πιο φιλικό και ουσιαστικό μαθησιακό περιβάλλον. Μέσα από ιστορίες, πρόσωπα και άλυστα προβλήματα, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να αναπτύξουν θετικότερη στάση απέναντι στα μαθηματικά, να καλλιεργήσουν τη συγκέντρωσή τους και να αποκτήσουν βαθύτερο ενδιαφέρον για μια επιστήμη που, αν και απαιτητική, προσφέρει μοναδικές δυνατότητες πνευματικής ανάπτυξης.

Η παρουσίαση στην τάξη των άλυτων προβλημάτων, όχι με τη μαθηματικά αυστηρή τους όψη αλλά μέσα από την ιστορική τους αναδρομή και την ανάδειξη των ανθρώπων που πρωταγωνίστησαν σε αυτό το μακρύ ταξίδι επίλυσης, μας δίνει μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να δουν οι μαθητές/μαθήτριες την εξέλιξη των μαθηματικών μέσα στο πέρασμα των αιώνων.

Τα άλυτα προβλήματα αποτελούν μια ιδιαίτερη κατηγορία μαθηματικών ερωτημάτων. Δεν προσφέρουν άμεση απάντηση, αλλά ανοίγουν δρόμους σκέψης, δημιουργούν νέα μαθηματικά εργαλεία και αναδεικνύουν τη ζωντανή φύση των μαθηματικών. Παρά το γεγονός ότι δεν αποτελούν μέρος της σχολικής ύλης, μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά με εξαιρετικά γόνιμο τρόπο.

Στη σύγχρονη εκπαίδευση, όπου η έμφαση μετατοπίζεται από την αποστήθιση στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων, τα άλυτα προβλήματα μπορούν να λειτουργήσουν ως ισχυρά παιδαγωγικά και γνωστικά εργαλεία.

Ένα θεμελιώδους σημασίας ζητούμενο κατά την εκπαιδευτική διαδικασία είναι η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των μαθητών. Δυστυχώς, το ελληνικό σχολείο είναι δομημένο με τέτοιο τρόπο ώστε η εκμάθηση συγκεκριμένων μεθοδολογιών να αποτελεί βασικό συστατικό για την επιτυχία. Κανείς δεν αμφισβητεί τη χρησιμότητα της εκμάθησης μιας μεθοδολογίας· αντίθετα, αποτελεί από μόνη της μια σημαντική δεξιότητα για έναν μαθητή, καθώς τον βοηθά να αντιλαμβάνεται μια διαδικασία και να την υλοποιεί. Ωστόσο, η κριτική σκέψη και η αυτενέργεια είναι δεξιότητες που πάντα ήταν και πάντα θα είναι το σημαντικότερο ζητούμενο.

Παρότι τα σχολικά μαθηματικά δεν συμβάλλουν ιδιαίτερα προς αυτή την κατεύθυνση, πάντα υπάρχει ο χρόνος και ο τρόπος ώστε η σχολική αίθουσα να μετατραπεί σε έναν χώρο που διεγείρει τη φαντασία των μαθητών. Η ιστορία των μαθηματικών γενικά, και η παρουσίαση των άλυτων προβλημάτων ειδικότερα, μπορεί να αποτελέσει το όχημα του εκπαιδευτικού που θα μεταφέρει τους μαθητές/μαθήτριες σε μια διαφορετική διαδικασία σκέψης.

Τα άλυτα προβλήματα διαθέτουν όλα εκείνα τα στοιχεία που χρειάζονται για να προσελκύσουν το ενδιαφέρον των μαθητών. Έχουν ιστορικό υπόβαθρο, περιλαμβάνουν σημαντικές προσωπικότητες των μαθηματικών που εμπλέκονται άμεσα ή έμμεσα και αφηγούνται ιστορίες ανθρώπων που, σε πολλές περιπτώσεις, αφιέρωσαν ολόκληρη τη ζωή τους στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, είτε τα κατάφεραν είτε όχι. Υπάρχουν περιπτώσεις μαθηματικών που έφτασαν πολύ κοντά στη λύση, αλλά τελικά κάποιος άλλος έβαλε την τελική πινελιά και καρπώθηκε το τελικό θεώρημα. Σε αρκετές περιπτώσεις, όπως στην εικασία του Goldbach, τα μαθηματικά που απαιτούνται για τη διατύπωση του

προβλήματος είναι εξαιρετικά απλά, γεγονός που ωθεί ακόμη και τον μέσο μαθητή να επιχειρήσει μια πρώτη απόπειρα απόδειξης.

Τα άλυτα προβλήματα έχουν ένα μοναδικό χαρακτηριστικό: δεν προσφέρουν έτοιμες λύσεις. Έτσι, ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να αναλύσει το πρόβλημα σε βάθος και να κατανοήσει πλήρως το ζητούμενο. Η σχολική τάξη μετατρέπεται σε έναν ιδανικό χώρο ανάπτυξης πιθανών στρατηγικών που μπορούν να ακολουθηθούν για την επίλυση του προβλήματος. Οι μαθητές/μαθήτριες διατυπώνουν υποθέσεις, οδηγούνται σε συμπεράσματα και καλούνται να τα ελέγξουν ως προς την ορθότητά τους. Αυτή η διαδικασία ενισχύει τη μεταγνωστική επίγνωση, τη λογική επιχειρηματολογία και τη δεξιότητα ελέγχου συμπερασμάτων. Το γεγονός ότι τα άλυτα προβλήματα δεν έχουν πάντοτε απάντηση από μόνο του διεγείρει το μυαλό των μαθητών, τους ωθεί να σκεφτούν έξω από την τετριμμένη λογική και τους συνηθισμένους τρόπους επίλυσης προβλημάτων.

Τους παρακινεί να αναζητήσουν νέες προσεγγίσεις, να εντοπίσουν μοτίβα και να «επιτεθούν» στο πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές. Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά, η οποία συχνά παραμελείται, εδώ αναδεικνύεται με ιδιαίτερη ένταση. Η ανάδειξη των άλυτων προβλημάτων από τον εκπαιδευτικό στην τάξη βοηθά τους μαθητές/μαθήτριες να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν μια στατική δομή που υπήρχε ανέκαθεν και απλώς περιμένει να ανακαλυφθεί. Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που εξελίσσεται ανά τους αιώνες μέσα από τις προσπάθειες σπουδαιών μαθηματικών, οι οποίοι προσθέτουν ο καθένας το δικό του λιθαράκι σε αυτόν τον θαυμαστό κόσμο (Davis, 2003).

Τα άλυτα προβλήματα, μέσα από την ιστορία των μαθηματικών, δείχνουν στους μαθητές/μαθήτριες ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα κλειστό σύστημα, αλλά μια επιστήμη με πληθώρα ανοιχτών ζητημάτων. Η μαθηματική γνώση δεν έχει ολοκληρωθεί. Αυτή η αντίληψη καλλιεργεί μια υγιή μαθηματική στάση και μειώνει το άγχος του «πρέπει πάντα να ξέρω τη σωστή απάντηση» (Bell, 1937).

Κάθε άλυτο πρόβλημα αποτελεί από μόνο του ένα ξεχωριστό κεφάλαιο. Διαθέτει το δικό του ιστορικό υπόβαθρο: πότε γεννήθηκε, πού και από ποιον διατυπώθηκε, ποιοι σπουδαίοι μαθηματικοί αποπειράθηκαν να το λύσουν και γιατί απέτυχαν, καθώς και πόσο κοντά βρισκόμαστε σήμερα στη λύση του. Από εκπαιδευτικής άποψης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφέρονται στην τάξη προβλήματα που θεωρήθηκαν άλυτα αλλά τελικά λύθηκαν έπειτα από αιώνες, όπως το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat. Κάθε μαθηματικό άλυτο πρόβλημα βασίστηκε αρχικά σε μια ιδέα, η οποία στην πορεία είτε εξελίχθηκε είτε απορρίφθηκε, πάντοτε όμως με έναν σκοπό: την τελική επίλυση του προβλήματος. Η αξιοποίηση, λοιπόν, της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική αίθουσα βοηθά τους μαθητές/μαθήτριες να δώσουν

νόημα στη γνώση, δημιουργεί αυθεντικό ενδιαφέρον και κάνει τα μαθηματικά να φαίνονται πιο ανθρώπινα (Hunt et al., 2001).

3.1.1 Τα τρία διάσημα προβλήματα της αρχαιότητας

Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας – ο διπλασιασμός του κύβου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου – αποτελούν μοναδικό διδακτικό υλικό, καθώς συνδυάζουν απλή διατύπωση, ισχυρή γεωμετρική διαίσθηση και βαθύ μαθηματικό περιεχόμενο. Η αξία τους στη διδασκαλία δεν έγκειται μόνο στο ίδιο το μαθηματικό αποτέλεσμα, αλλά κυρίως στη διαδικασία σκέψης που κινητοποιούν και στα ερωτήματα που γεννούν γύρω από τα όρια των μαθηματικών μεθόδων.

Κοινό χαρακτηριστικό και των τριών προβλημάτων είναι ότι η διατύπωσή τους είναι άμεσα κατανοητή ακόμη και από μαθητές/μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο διπλασιασμός του κύβου ζητά την κατασκευή ενός νέου κύβου με διπλάσιο όγκο από έναν δοσμένο, η τριχοτόμηση της γωνίας τη διαίρεση μιας γωνίας σε τρία ίσα μέρη, ενώ ο τετραγωνισμός του κύκλου τη δημιουργία ενός τετραγώνου ίσου εμβαδού με έναν κύκλο. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να παρουσιαστούν οπτικά, να σχεδιαστούν και να γίνουν αντικείμενο πειραματισμού, γεγονός που τα καθιστά ιδιαίτερα ελκυστικά για τους μαθητές/μαθήτριες.

Η διδακτική δυναμική των προβλημάτων αυτών ενισχύεται σημαντικά όταν εισαχθεί ο ιστορικός περιορισμός της χρήσης αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Οι μαθητές/μαθήτριες καλούνται να εργαστούν μέσα σε ένα αυστηρό πλαίσιο, όπως ακριβώς και οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Σε αυτό το στάδιο, μπορούν να επιχειρήσουν κατασκευές, να προτείνουν λύσεις και να διαπιστώσουν ότι πολλές ιδέες φαίνονται να λειτουργούν, αλλά τελικά δεν ολοκληρώνονται με τα επιτρεπτά μέσα. Η εμπειρία αυτή δημιουργεί γόνιμο προβληματισμό και οδηγεί φυσικά στη συνειδητοποίηση ότι η δυσκολία δεν είναι απλώς θέμα επιδεξιότητας ή έλλειψης φαντασίας.

Ιδιαίτερη διδακτική αξία έχει το γεγονός ότι, αν παρουσιαστεί μια υποψήφια κατασκευή, ο έλεγχος της ορθότητάς της είναι σχετικά εύκολος. Για παράδειγμα, αν κάποιος ισχυριστεί ότι έχει τριχοτομήσει μια γωνία,

αριθμητικές πράξεις και σε ιδιότητες αριθμών, και έτσι το αρχικό ερώτημα εξετάστηκε σε ένα νέο «δωμάτιο» κανόνων, εκείνο της άλγεβρας.

Μέσα σε αυτό το νέο πλαίσιο, το πρόβλημα έγινε προσβάσιμο με διαφορετικά εργαλεία. Οι μαθηματικοί εργάστηκαν με τους κανόνες της άλγεβρας, μελετώντας ποιοι αριθμοί μπορούν

να κατασκευαστούν με πεπερασμένο πλήθος πράξεων και τετραγωνικών ριζών. Εκεί αποδείχθηκε ότι τα μεγέθη που απαιτούνται για την επίλυση των τριών προβλημάτων δεν ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Με άλλα λόγια, στο αλγεβρικό «δωμάτιο» κατέστη δυνατό να αποδειχθεί αυστηρά ότι το πρόβλημα δεν επιδέχεται λύση με τα επιτρεπτά μέσα.

Το κρίσιμο διδακτικό σημείο βρίσκεται στο γεγονός ότι, αφού επιλύθηκε το πρόβλημα στο νέο πλαίσιο, τα συμπεράσματα μεταφέρθηκαν πίσω στο αρχικό γεωμετρικό πλαίσιο. Έτσι, η αδυναμία επίλυσης με κανόνα και διαβήτη δεν είναι αποτέλεσμα εικασίας ή εμπειρικής αποτυχίας, αλλά αυστηρό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μεταφορά και επανερμηνεία του προβλήματος. Το πρόβλημα «λύθηκε» τελικά όχι με την έννοια της κατασκευής, αλλά με την έννοια της πλήρους κατανόησης των ορίων του.

Μπορεί κανείς να ελέγξει αν τα τρία μέρη είναι ίσα. Αντίθετα, το να βρεθεί εξαρχής μια τέτοια κατασκευή αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολο. Η διάκριση αυτή βοηθά τους μαθητές/μαθήτριες να κατανοήσουν ότι στα μαθηματικά δεν έχει την ίδια φύση το «ελέγχο» και το «κατασκευάζω», και ότι η δημιουργία μιας λύσης μπορεί να είναι πολύ πιο απαιτητική από την επιβεβαίωσή της.

Η ιστορική εξέλιξη των προβλημάτων προσφέρει ένα ακόμη ισχυρό διδακτικό μήνυμα. Οι αρχαίοι μαθηματικοί δεν γνώριζαν ότι τα προβλήματα αυτά είναι άλυτα με κανόνα και διαβήτη· πίστευαν ότι μια λύση θα βρεθεί με επιμονή και ευφυΐα. Το γεγονός ότι χρειάστηκαν περισσότεροι από δύο χιλιάδες χρόνια για να αποδειχθεί η αδυναμία επίλυσής τους δείχνει στους μαθητές/μαθήτριες ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται αργά, συχνά μέσα από αποτυχίες και αναθεωρήσεις. Η τελική απάντηση δεν ήρθε με μια νέα κατασκευή, αλλά με μια βαθύτερη θεωρητική κατανόηση, γεγονός που αναδεικνύει τη σημασία της θεωρίας στη μαθηματική πρόοδο.

Από παιδαγωγική σκοπιά, τα τρία προβλήματα της αρχαιότητας συμβάλλουν ουσιαστικά στην απομυθοποίηση της εικόνας των μαθηματικών ως μιας επιστήμης με έτοιμες και αμετάβλητες απαντήσεις. Οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν ερωτήματα που δεν λύνονται πάντα με τον τρόπο που αρχικά φανταζόμαστε και ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο ένα σύνολο τεχνικών, αλλά μια διαρκής αναζήτηση ορίων και δυνατοτήτων. Με αυτόν τον τρόπο, καλλιεργείται η κριτική σκέψη και ενισχύεται η συνειδητοποίηση ότι η μαθηματική γνώση είναι ανθρώπινο δημιούργημα, άρρηκτα συνδεδεμένο με το ιστορικό και πολιτισμικό του πλαίσιο.

Τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας - ο διπλασιασμός του κύβου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου - δεν έχουν μόνο ιστορική και θεωρητική σημασία, αλλά και εξαιρετικά υψηλή διδακτική αξία. Κοινό τους χαρακτηριστικό είναι ότι

διατυπώθηκαν ως γεωμετρικά προβλήματα κατασκευής, με αυστηρό περιορισμό στη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Για αιώνες, οι μαθηματικοί επιχείρησαν να τα επιλύσουν παραμένοντας πιστοί σε αυτό το γεωμετρικό πλαίσιο κανόνων, θεωρώντας ότι η λύση θα προέκυπτε μέσα από πιο ευφυείς ή πιο περίτεχνες κατασκευές.

Η ουσιαστική πρόοδος, ωστόσο, δεν ήρθε μέσα από τη γεωμετρία καθαυτή, αλλά από μια ριζική αλλαγή οπτικής. Πολλούς αιώνες αργότερα, οι μαθηματικοί κατάφεραν να αποδείξουν την αδυναμία επίλυσης των προβλημάτων αυτών με κανόνα και διαβήτη, όχι επειδή βρήκαν μια καλύτερη γεωμετρική κατασκευή, αλλά επειδή μετέφεραν το πρόβλημα σε ένα διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο.

Από διδακτική άποψη, αυτή η διαδικασία έχει τεράστια σημασία. Δείχνει στους μαθητές/μαθήτριες ότι στα μαθηματικά δεν εργαζόμαστε πάντοτε μέσα σε ένα και μοναδικό πλαίσιο κανόνων. Πολλές φορές, ένα πρόβλημα φαίνεται αδιέξοδο όταν προσπαθούμε να το επιλύσουμε παραμένοντας σε ένα συγκεκριμένο σύστημα εργαλείων και περιορισμών. Η πρόοδος έρχεται όταν καταφέρουμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα, να το δούμε από διαφορετική οπτική και να το μεταφέρουμε σε ένα νέο πλαίσιο, όπου οι κανόνες είναι διαφορετικοί και ενδεχομένως πιο κατάλληλοι.

Η τεχνική του μετασχηματισμού αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθηματικής σκέψης και μπορεί να αξιοποιηθεί παιδαγωγικά με ιδιαίτερη αποτελεσματικότητα. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν ότι η αλλαγή αναπαράστασης, η μετάβαση από τη γεωμετρία στην άλγεβρα ή από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, δεν είναι απλώς τεχνάσματα, αλλά ουσιαστικές στρατηγικές επίλυσης. Μέσα από τα τρία προβλήματα της αρχαιότητας, αναδεικνύεται ότι η δημιουργικότητα στα μαθηματικά δεν έγκειται μόνο στην επιδεξιότητα, αλλά κυρίως στην ικανότητα αλλαγής οπτικής.

Η διδακτική αξία των τριών προβλημάτων της αρχαιότητας δεν περιορίζεται στο ιστορικό τους ενδιαφέρον. Αποτελούν ένα εξαιρετικό παράδειγμα του πώς τα μαθηματικά προχωρούν μέσα από μετασχηματισμούς, αλλαγές πλαισίου και βαθύτερη κατανόηση των ορίων των μεθόδων μας. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι μια στατική συλλογή κανόνων, αλλά μια δυναμική επιστήμη που εξελίσσεται μέσα από τη διαρκή αναζήτηση νέων τρόπων σκέψης.

Τελικά, η διδακτική αξιοποίηση των τριών άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας δεν στοχεύει στην τεχνική τους ανάλυση, αλλά στην καλλιέργεια μιας βαθύτερης σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά. Μέσα από αυτά, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να ευαισθητοποιηθούν απέναντι στη διαδικασία της μαθηματικής σκέψης, να κατανοήσουν τη

σημασία των περιορισμών και να δουν τα μαθηματικά ως μια ζωντανή επιστήμη, που εξελίσσεται μέσα από ερωτήματα, αμφιβολίες και δημιουργική αναζήτηση.

Μια ακόμη σημαντική παιδαγωγική διάσταση των τριών προβλημάτων της αρχαιότητας είναι η δυνατότητα διαθεματικής προσέγγισής τους. Τα προβλήματα αυτά δεν αποτελούν μόνο αντικείμενο μαθηματικής μελέτης, αλλά συνδέονται άμεσα με την ιστορία, τη φιλοσοφία, τον πολιτισμό και την εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης. Η αναφορά στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, στα μαντεία, στις φιλοσοφικές αντιλήψεις για τη γνώση και στις μετέπειτα εξελίξεις της άλγεβρας και της θεωρίας αριθμών επιτρέπει τη δημιουργία γεφυρών ανάμεσα στα μαθηματικά και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα. Μέσα από αυτή τη διαθεματική προοπτική, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι τα μαθηματικά δεν αναπτύσσονται απομονωμένα, αλλά αποτελούν μέρος της ευρύτερης πνευματικής και πολιτισμικής ιστορίας του ανθρώπου. Η προσέγγιση αυτή συμβάλλει στην καλλιέργεια μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας για τη φύση της επιστήμης και ενισχύει το ενδιαφέρον των μαθητών για τη μαθηματική γνώση. Συνολικά, τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας προσφέρουν ένα ιδιαίτερα γόνιμο διδακτικό πεδίο, καθώς συνδυάζουν την ιστορική διάσταση, τη μαθηματική αυστηρότητα και τη δημιουργική διερεύνηση. Η παιδαγωγική τους αξία δεν έγκειται στην αναζήτηση μιας λύσης, αλλά στην κατανόηση της ίδιας της διαδικασίας μέσω της οποίας εξελίσσεται η μαθηματική γνώση. Μέσα από αυτά τα προβλήματα, οι μαθητές/μαθήτριες έχουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα ολοκληρωμένο και αμετάβλητο οικοδόμημα, αλλά μια διαρκής ανθρώπινη προσπάθεια αναζήτησης, αμφισβήτησης και κατανόησης του κόσμου.

3.1.2 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

Το λεγόμενο Τελευταίο Θεώρημα του Pierre de Fermat αποτελεί ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα άλυτου προβλήματος με τεράστια διδακτική αξία. Η διατύπωσή του είναι εξαιρετικά απλή και μπορεί να γίνει πλήρως κατανοητή από μαθητές/μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^v + y^v = z^v \text{ όπου } x, y, z \in \mathbb{N} \text{ και } v \in \mathbb{Z}, v \geq 2. \quad .$$

Το γεγονός ότι ένα τόσο απλό στη διατύπωση πρόβλημα παρέμεινε άλυτο για περισσότερα από τριακόσια χρόνια δημιουργεί έντονο ενδιαφέρον και προβληματισμό στους μαθητές/μαθήτριες.

Από διδακτική σκοπιά, ιδιαίτερη σημασία έχει η ιστορική αφήγηση γύρω από το θεώρημα. Ο Fermat σημείωσε τη διατύπωση στο περιθώριο ενός βιβλίου, ισχυριζόμενος ότι διαθέτει μια «θαυμάσια απόδειξη», η οποία όμως δεν χωρούσε στο περιθώριο της σελίδας. Η φράση αυτή, ανεξάρτητα από το αν ο Fermat διέθετε πράγματι πλήρη απόδειξη, λειτούργησε ως πνευματική πρόκληση για γενιές μαθηματικών. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά προχωρούν συχνά μέσα από τέτοιες προκλήσεις, που δεν λύνονται άμεσα αλλά διατηρούν τη δυναμική τους μέσα στον χρόνο.

Στο σταθμό του μετρό της 8ης οδού στη Νέα Υόρκη υπάρχει ένα γκράφιτι με το εξής χαριτωμένο λόγιο: « $x^n + y^n = z^n$: καμία λύση. *Ανακάλυψα μία πραγματικά εξαίσιμα λύση όμως δεν προλαβαίνω να την γράψω γιατί έρχεται το τρένο*» (Simon, 1998)

Η μακρόχρονη αποτυχία εύρεσης απόδειξης προσφέρει ένα σημαντικό διδακτικό μήνυμα: η δυσκολία ενός προβλήματος δεν είναι πάντοτε εμφανής από τη διατύπωσή του. Οι μαθητές/μαθήτριες συχνά ταυτίζουν την απλότητα με την ευκολία· το Θεώρημα του Fermat ανατρέπει αυτή την αντίληψη, δείχνοντας ότι ένα πρόβλημα μπορεί να είναι στοιχειώδες στη μορφή του και ταυτόχρονα εξαιρετικά απαιτητικό στη λύση του. Με τον τρόπο αυτό, ενισχύεται η κατανόηση ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο υπολογισμός, αλλά και βαθιά εννοιολογική διερεύνηση. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι το πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο επί της ουσίας είναι η διατύπωση του θεωρήματος του Fermat για $n=2$, διδάσκεται σε μαθητές/μαθήτριες Β' Γυμνασίου, ενώ αν αλλάξουμε τις επιτρεπτές τιμές του n το πρόβλημα μεταμορφώνεται σε ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα όλων των εποχών.

Ιδιαίτερη διδακτική βαρύτητα έχει η πορεία του Andrew Wiles, ο οποίος τελικά απέδειξε το θεώρημα στα τέλη του 20ού αιώνα. Η ιστορία του Wiles μπορεί να παρουσιαστεί στους μαθητές/μαθήτριες ως παράδειγμα μακροχρόνιας αφοσίωσης και εσωτερικού κινήτρου. Από την παιδική του ηλικία είχε γοητευθεί από το θεώρημα και, ως ενήλικας πλέον μαθηματικός, αφιέρωσε περίπου επτά χρόνια σχεδόν απομονωμένης εργασίας για την απόδειξή του. Το γεγονός ότι εργάστηκε μακριά από δημοσιότητα, με μοναδικό στόχο την επίλυση του προβλήματος, αναδεικνύει μια βαθιά διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας.

Η αρχική παρουσίαση της απόδειξης και η μετέπειτα ανακάλυψη ενός κενού σε αυτήν προσφέρουν επιπλέον διδακτικά στοιχεία. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν ότι ακόμη και στα υψηλότερα επίπεδα, η μαθηματική εργασία περιλαμβάνει λάθη, αμφιβολίες και αναθεωρήσεις. Η τελική διόρθωση και ολοκλήρωση της απόδειξης δείχνει ότι η επιμονή και η συνεργασία αποτελούν βασικά στοιχεία της επιστημονικής προόδου. Το μήνυμα αυτό

είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εκπαιδευτικό πλαίσιο, καθώς απομυθοποιεί την εικόνα της «τέλειας λύσης» και ενισχύει την αποδοχή της μαθησιακής διαδικασίας.

Από παιδαγωγική άποψη, το Θεώρημα του Fermat και η ιστορία του Wiles προσφέρουν τη δυνατότητα να αναδειχθεί ότι τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν ιδανικό ζώης. Όχι με την έννοια της επαγγελματικής επιτυχίας ή της κοινωνικής αναγνώρισης, αλλά ως πεδίο βαθιάς πνευματικής ικανοποίησης και προσωπικής ολοκλήρωσης. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να δουν ότι η ενασχόληση με τα μαθηματικά δεν περιορίζεται σε σχολικές ασκήσεις, αλλά μπορεί να μετατραπεί σε διαχρονική αναζήτηση νοήματος και αλήθειας.

Τελικά, η διδακτική αξιοποίηση του Θεωρήματος του Fermat επιτρέπει στους μαθητές/μαθήτριες να έρθουν σε επαφή με την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών: την επιμονή, το πάθος, την απογοήτευση και τη χαρά της ανακάλυψης. Μέσα από αυτή την ιστορία, τα μαθηματικά παρουσιάζονται όχι ως ένα κλειστό σύστημα γνώσεων, αλλά ως μια ζωντανή πνευματική δραστηριότητα, ικανή να εμπνεύσει και να καθοδηγήσει όσους επιλέγουν να την ακολουθήσουν. Το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat προσφέρει επίσης μια σημαντική ευκαιρία για την κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα στην επαλήθευση και τη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν εύκολα να ελέγξουν ότι η εξίσωση δεν έχει λύσεις για πολλές μικρές τιμές των μεταβλητών και να διαπιστώσουν ότι το αποτέλεσμα φαίνεται να ισχύει. Ωστόσο, η παρατήρηση αυτή δεν αρκεί για να θεωρηθεί το θεώρημα αποδεδειγμένο. Η ιστορία του προβλήματος δείχνει ότι ακόμη και όταν μια πρόταση φαίνεται να επαληθεύεται σε αναρίθμητα παραδείγματα, η μαθηματική βεβαιότητα απαιτεί μια γενική και αυστηρή απόδειξη. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται σε επαφή με μία από τις θεμελιώδεις αρχές της μαθηματικής σκέψης και κατανοούν τον ιδιαίτερο ρόλο που διαδραματίζει η απόδειξη στη μαθηματική γνώση. Η διδακτική αξιοποίηση του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat δεν αποσκοπεί στην κατανόηση της σύγχρονης και ιδιαίτερα σύνθετης απόδειξής του, αλλά στην ανάδειξη της φύσης της μαθηματικής έρευνας. Μέσα από την ιστορία του προβλήματος, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται μέσα από ερωτήματα, αμφιβολίες, δοκιμές και αναζητήσεις που συχνά διαρκούν πολλές γενιές. Η περίπτωση του Fermat αναδεικνύει με χαρακτηριστικό τρόπο ότι η πρόοδος της επιστήμης είναι αποτέλεσμα συλλογικής και διαχρονικής προσπάθειας και όχι μόνο μεμονωμένων ανακαλύψεων.

3.1.3 Η Εικασία του Goldbach

Η Εικασία του Christian Goldbach αποτελεί ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα άλυτου προβλήματος με εξαιρετικά υψηλή διδακτική αξία. Η διατύπωσή της είναι τόσο απλή,

ώστε μπορεί να γίνει κατανοητή ακόμη και από μαθητές/μαθήτριες Γυμνασίου: *κάθε άρτιος άκέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών*. Η απλότητα αυτή δημιουργεί άμεση εγγύτητα με τον μαθητή και καταρρίπτει την εντύπωση ότι τα μεγάλα μαθηματικά προβλήματα είναι αναγκαστικά δυσνόητα ή απρόσιτα.

Από διδακτική σκοπιά, η εικασία του Goldbach μπορεί να παρουσιαστεί ήδη από τα πρώτα στάδια της διδασκαλίας των πρώτων αριθμών. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν εύκολα να ελέγξουν την εικασία για μικρούς άρτιους αριθμούς, γράφοντας, για παράδειγμα, το 10 ως $3+7$ ή το 20 ως $7+13$. Η διαδικασία αυτή λειτουργεί ενθαρρυντικά, καθώς οι μαθητές/μαθήτριες διαπιστώνουν ότι το πρόβλημα «δουλεύει» στις περιπτώσεις που μπορούν να εξετάσουν. Το γεγονός αυτό γεννά φυσικά την πεποίθηση ότι η εικασία είναι αληθής, οδηγώντας τους μαθητές/μαθήτριες σε αυθόρμητες γενικεύσεις.

Το κρίσιμο διδακτικό σημείο αναδεικνύεται όταν τεθεί το ερώτημα της απόδειξης. Παρότι η εικασία επαληθεύεται για πάρα πολλές περιπτώσεις και έχει ελεγχθεί υπολογιστικά για εξαιρετικά μεγάλους αριθμούς, δεν έχει μέχρι σήμερα αποδειχθεί γενικά. Οι μαθητές/μαθήτριες καλούνται έτσι να συνειδητοποιήσουν τη θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα στον έλεγχο πολλών παραδειγμάτων και στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Η διάκριση αυτή αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης και συχνά είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτή μέσα από τυπικές σχολικές ασκήσεις.

Η εικασία του Goldbach διεγείρει ιδιαίτερα τη μαθηματική φαντασία των μαθητών, καθώς τους επιτρέπει να συμμετάσχουν ενεργά στη διερεύνηση. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να προσπαθήσουν να βρουν μοτίβα, να αναζητήσουν «δύσκολους» άρτιους αριθμούς ή να διατυπώσουν δικές τους υποθέσεις. Η ενασχόληση αυτή δημιουργεί την αίσθηση ότι συμμετέχουν σε μια αυθεντική μαθηματική διαδικασία και όχι απλώς στην εκτέλεση έτοιμων αλγορίθμων.

Από παιδαγωγική άποψη, ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι η εικασία του Goldbach παραμένει άλυτη εδώ και σχεδόν τρεις αιώνες, παρά την απλότητά της. Το στοιχείο αυτό λειτουργεί απομυθοποιητικά για την εικόνα των μαθηματικών ως μιας πλήρως ολοκληρωμένης επιστήμης. Οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι ακόμη και ερωτήματα που φαίνονται «παιδικά» στη διατύπωση μπορούν να κρύβουν τεράστιο βάθος και να αντιστέκονται στην απόδειξη για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα.

Η διδακτική αξιοποίηση της εικασίας του Goldbach συμβάλλει ουσιαστικά στην καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά. Οι μαθητές/μαθήτριες ενθαρρύνονται να δοκιμάσουν, να αποτύχουν, να αναστοχαστούν και να κατανοήσουν ότι η αποτυχία μιας απόδειξης δεν σημαίνει έλλειψη ικανότητας, αλλά αποτελεί φυσικό μέρος της μαθηματικής

έρευνας. Με αυτόν τον τρόπο, η εικασία του Goldbach λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στο σχολικό μάθημα και την αυθεντική μαθηματική σκέψη.

Τελικά, η Εικασία του Goldbach αποτελεί ίσως το πιο προσιτό παράδειγμα άλυτου προβλήματος για εκπαιδευτική αξιοποίηση. Μέσα από αυτήν, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να ευαισθητοποιηθούν γύρω από τη φύση της μαθηματικής απόδειξης, να κατανοήσουν τα όρια της εμπειρικής επαλήθευσης και να έρθουν σε επαφή με το πνεύμα της μαθηματικής αναζήτησης. Η απλότητά της δεν μειώνει τη σημασία της· αντίθετα, την καθιστά ιδανικό εργαλείο για να εμπνεύσει τους μαθητές/μαθήτριες και να τους προσκαλέσει να σκεφτούν, να αμφισβητήσουν και να δημιουργήσουν.

Το Τελευταίο Θεώρημα του Pierre de Fermat και η Εικασία του Christian Goldbach αποτελούν δύο εμβληματικά παραδείγματα άλυτων (ή πρώην άλυτων) προβλημάτων της θεωρίας αριθμών, τα οποία, παρά τις σημαντικές διαφορές τους ως προς την ιστορική τους εξέλιξη, μοιράζονται ένα κοινό και εξαιρετικά ενδιαφέρον χαρακτηριστικό: είναι διατυπωμένα με τρόπο εξαιρετικά απλό και άμεσα κατανοητό, ακόμη και σε μαθητές/μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Και στις δύο περιπτώσεις, το πρόβλημα μπορεί να εξηγηθεί χωρίς ιδιαίτερο συμβολισμό ή προχωρημένες έννοιες, γεγονός που δημιουργεί την εντύπωση ότι η απόδειξη θα πρέπει να είναι αντίστοιχα απλή.

Ωστόσο, αυτή ακριβώς η απλότητα της διατύπωσης έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τη βαθιά δυσκολία της απόδειξης. Το θεώρημα του Fermat, αν και σήμερα είναι αποδεδειγμένο, αντιστάθηκε για περισσότερα από 350 χρόνια στις προσπάθειες των μεγαλύτερων μαθηματικών και τελικά αποδείχθηκε μόνο όταν αναπτύχθηκαν ιδιαίτερα προχωρημένα εργαλεία της σύγχρονης θεωρίας αριθμών και της αλγεβρικής γεωμετρίας. Η απόδειξη του Andrew Wiles δεν αποτελεί μια «κομψή» ή σύντομη ακολουθία συλλογισμών, αλλά εκτείνεται σε δεκάδες σελίδες και βασίζεται σε θεωρίες που υπερβαίνουν κατά πολύ το αρχικό πλαίσιο του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, η εικασία του Goldbach, παρά τη μακρόχρονη και εντατική έρευνα, παραμένει μέχρι σήμερα άλυτη, υπογραμμίζοντας ότι ακόμη και στοιχειώδη ερωτήματα για τους φυσικούς αριθμούς μπορούν να ξεπερνούν τις δυνατότητες της σύγχρονης μαθηματικής γνώσης.

Από διδακτική σκοπιά, τα δύο αυτά προβλήματα αποτελούν εξαιρετικά παραδείγματα για την εκπαίδευση. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν άμεσα τη διατύπωσή τους και να πειραματιστούν με παραδείγματα, γεγονός που ενισχύει τη μαθηματική περιέργεια και τη διερευνητική σκέψη. Ταυτόχρονα, η αντίθεση ανάμεσα στην απλότητα της διατύπωσης και τη δυσκολία της απόδειξης προσφέρει μια σπάνια ευκαιρία να αναδειχθεί η πραγματική φύση των μαθηματικών: όχι ως σύνολο εύκολων υπολογισμών, αλλά ως επιστήμη βάθους, υπομονής

και δημιουργικής αναζήτησης. Με αυτή την έννοια, τόσο το θεώρημα του Fermat όσο και η εικασία του Goldbach μπορούν να λειτουργήσουν ως γέφυρες ανάμεσα στη σχολική μαθηματική εμπειρία και τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα, αναδεικνύοντας τον παιδαγωγικό ρόλο των άλυτων προβλημάτων.

Η Εικασία του Goldbach προσφέρει επίσης σημαντικές δυνατότητες αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων στη μαθηματική εκπαίδευση. Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού ή απλών προγραμμάτων, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να ελέγξουν την εγκυρότητα της εικασίας για μεγάλες περιοχές αριθμών, να καταγράψουν δεδομένα και να αναζητήσουν πρότυπα στις αναπαραστάσεις των άρτιων αριθμών ως αθροισμάτων πρώτων. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναπτύσσονται στοιχεία υπολογιστικής σκέψης, ενώ παράλληλα γίνεται κατανοητό ότι η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να υποστηρίξει τη μαθηματική διερεύνηση χωρίς να υποκαθιστά τη μαθηματική απόδειξη. Η διάκριση αυτή αποτελεί σημαντικό στοιχείο της σύγχρονης μαθηματικής. Η Εικασία του Goldbach παρουσιάζει ένα ιδιαίτερο διδακτικό πλεονέκτημα: βρίσκεται σε ένα επίπεδο πολυπλοκότητας που επιτρέπει στους μαθητές/μαθήτριες να συμμετέχουν ουσιαστικά στη διερεύνησή της χωρίς να απαιτούνται εξειδικευμένες μαθηματικές γνώσεις. Το γεγονός αυτό τη μετατρέπει σε ένα εξαιρετικό παράδειγμα εισαγωγής στη μαθηματική έρευνα, καθώς οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να βιώσουν βασικές πτυχές της ερευνητικής διαδικασίας, όπως η παρατήρηση, η διατύπωση υποθέσεων, ο έλεγχος παραδειγμάτων και η αναζήτηση επιχειρημάτων.

3.1.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Η ιστορία των πολυωνυμικών εξισώσεων και η συμβολή των Niels Henrik Abel και Évariste Galois προσφέρουν ένα εξαιρετικά γόνιμο πλαίσιο για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών. Η παιδαγωγική τους αξία δεν περιορίζεται στο μαθηματικό περιεχόμενο, αλλά επεκτείνεται στη διαμόρφωση στάσεων, αντιλήψεων και της συναισθηματικής σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά.

Σε ένα πρώτο επίπεδο, οι μαθητές/μαθήτριες είναι ήδη εξοικειωμένοι με την έννοια της εξίσωσης και της λύσης της. Η ιστορική αφήγηση μπορεί να ξεκινήσει από την επιτυχία των μαθηματικών να βρουν κλειστούς τύπους για εξισώσεις χαμηλού βαθμού, γεγονός που δημιούργησε την προσδοκία ότι κάθε εξίσωση μπορεί, με αρκετή προσπάθεια, να επιλυθεί μέσω ενός γενικού τύπου. Σε αυτό το σημείο, η εμφάνιση του Abel λειτουργεί διδακτικά ως ανατροπή: οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται αντιμέτωποι με το γεγονός ότι ένας νέος, σχεδόν άγνωστος μαθηματικός απέδειξε πως ένα πρόβλημα που απασχολούσε την επιστήμη για αιώνες δεν επιδέχεται λύση με τον τρόπο που έως τότε αναζητούνταν.

Η διδακτική αξία της περίπτωσης του Abel ενισχύεται από την προσωπική του ιστορία. Ο πρόωρος θάνατός του και η φτώχεια μέσα στην οποία έζησε επιτρέπουν στον εκπαιδευτικό να αναδείξει ότι η μαθηματική ιδιοφυΐα δεν συνοδεύεται πάντοτε από κοινωνική αναγνώριση ή υλική ασφάλεια. Οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και ότι η πρόοδος της επιστήμης δεν είναι πάντα δίκαιη προς τους δημιουργούς της. Το στοιχείο αυτό συμβάλλει ουσιαστικά στην αποδόμηση της εικόνας του «απρόσιτου» μαθηματικού και στην καλλιέργεια ενσυναίσθησης.

Η περίπτωση του Galois προσθέτει μια ακόμη βαθύτερη διδακτική διάσταση. Οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται σε επαφή με έναν νέο άνθρωπο, κοντά στη δική τους ηλικία, ο οποίος δεν έδωσε απλώς μια αρνητική απάντηση, αλλά άλλαξε ριζικά τον τρόπο με τον οποίο τίθενται τα μαθηματικά ερωτήματα. Η μετατόπιση από την αναζήτηση τύπων στη μελέτη δομών και συμμετριών μπορεί να παρουσιαστεί ως παράδειγμα δημιουργικής σκέψης υψηλού επιπέδου. Το γεγονός ότι το έργο του Galois αρχικά απορρίφθηκε ως ακατανόητο λειτουργεί διδακτικά ως υπενθύμιση ότι η καινοτομία συχνά προηγείται της κατανόησής της.

Από παιδαγωγική σκοπιά, ιδιαίτερη σημασία έχει η σύγκριση των δύο περιπτώσεων. Ο Abel δείχνει στους μαθητές/μαθήτριες ότι η μαθηματική πρόοδος μπορεί να προκύψει μέσα από την απόδειξη της αδυναμίας, ενώ ο Galois αποκαλύπτει ότι η απάντηση σε ένα πρόβλημα δεν είναι πάντοτε ένας τύπος, αλλά ένα κριτήριο ή μια νέα οπτική. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές/μαθήτριες οδηγούνται στη συνειδητοποίηση ότι τα μαθηματικά δεν εξελίσσονται μόνο προσθέτοντας λύσεις, αλλά και αναδιατυπώνοντας ερωτήματα.

Η αξιοποίηση των ιστοριών του Abel και του Galois στο μάθημα συμβάλλει ουσιαστικά στην ευαισθητοποίηση των μαθητών ως προς τη φύση των μαθηματικών. Οι μαθητές/μαθήτριες κατανοούν ότι η αποτυχία, η απόρριψη και η αμφισβήτηση δεν αποτελούν εμπόδια, αλλά συχνά αναγκαία στάδια της επιστημονικής δημιουργίας. Παράλληλα, ενισχύεται η ιδέα ότι η μαθηματική σκέψη δεν είναι προνόμιο μιας ελίτ, αλλά μπορεί να αναπτυχθεί ακόμη και σε πολύ νεαρή ηλικία, όταν καλλιεργείται η ελευθερία σκέψης και η τόλμη στην αναζήτηση νέων ιδεών.

Τελικά, η διδακτική προσέγγιση των περιπτώσεων Abel και Galois επιτρέπει στους μαθητές/μαθήτριες να δουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη, ιστορικά εξελισσόμενη επιστήμη, όπου τα άλυτα προβλήματα λειτουργούν ως αφετηρίες δημιουργίας και όχι ως αδιέξοδα. Μέσα από αυτές τις ιστορίες, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να αναπτύξουν σεβασμό για τη μαθηματική σκέψη, να κατανοήσουν τα όριά της και να συνδεθούν ουσιαστικά με το πνεύμα της επιστημονικής αναζήτησης.

Η ιστορία του Évariste Galois αποτελεί ένα από τα πιο συγκλονιστικά και διδακτικά παραδείγματα στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Galois έζησε μια εξαιρετικά σύντομη ζωή, μόλις είκοσι ετών, όμως μέσα σε αυτό το ελάχιστο χρονικό διάστημα κατάφερε να αλλάξει ριζικά την πορεία της άλγεβρας. Η περίπτωση του αναδεικνύει με μοναδικό τρόπο το χάσμα που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα στη δημιουργική μαθηματική σκέψη και στην ικανότητα του επιστημονικού περιβάλλοντος να την αναγνωρίσει εγκαίρως.

Οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν ένα από τα πρώτα «ιδιαιτέρα» μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές/μαθήτριες ήδη από τις τάξεις του Δημοτικού. Μαθαίνουν ότι είναι οι αριθμοί που διαιρούνται μόνο με τη μονάδα και τον εαυτό τους και συχνά τους γνωρίζουν μέσα από απλές, χειροπιαστές διαδικασίες, όπως το κόσκινο του Ερατοσθένη. Από πολύ νωρίς, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι οι πρώτοι αριθμοί δεν εμφανίζονται με κανονικό ή προβλέψιμο τρόπο, αλλά μοιάζουν να κατανέμονται «άτακτα» μέσα στους φυσικούς αριθμούς.

Αυτή ακριβώς η αίσθηση της τυχαιότητας αποτελεί ισχυρό διδακτικό ερέθισμα. Οι μαθητές/μαθήτριες παρατηρούν ότι, όσο προχωρούν στους μεγαλύτερους αριθμούς, οι πρώτοι γίνονται ολοένα και πιο αραιοί, χωρίς όμως να εξαφανίζονται ποτέ. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε φυσικά ερωτήματα: υπάρχει κάποιο μοτίβο στην εμφάνισή τους; μπορούμε να προβλέψουμε πού θα εμφανιστεί ο επόμενος πρώτος; Η μετάβαση από την απλή παρατήρηση στην αναζήτηση γενικών κανόνων αποτελεί κεντρικό στόχο της μαθηματικής σκέψης και μπορεί να καλλιεργηθεί ουσιαστικά μέσα από τη διδασκαλία των πρώτων αριθμών.

Η ιστορία των μαθηματικών δείχνει ότι τα ίδια ερωτήματα απασχόλησαν κορυφαίους μαθηματικούς ήδη από την αρχαιότητα. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι, χωρίς όμως να δώσει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται. Αργότερα, μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Euler και ο Gauss προσπάθησαν να κατανοήσουν τη «συμπεριφορά» των πρώτων, αναζητώντας νόμους που να περιγράφουν τη συχνότητά τους μέσα στους φυσικούς αριθμούς. Οι προσπάθειες αυτές δείχνουν στους μαθητές/μαθήτριες ότι ένα πρόβλημα μπορεί να παραμένει ανοιχτό επί αιώνες, παρότι αφορά έννοιες που είναι φαινομενικά απλές.

Ένα ακόμη σημαντικό διδακτικό στοιχείο που προκύπτει από την ιστορία των πολυωνυμικών εξισώσεων είναι η μετάβαση από τον υπολογισμό στη μελέτη μαθηματικών δομών. Στις πρώτες σχολικές βαθμίδες οι μαθητές/μαθήτριες συνηθίζουν να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως μια διαδικασία εφαρμογής κανόνων και εκτέλεσης πράξεων. Η περίπτωση των Abel και Galois δείχνει ότι η σύγχρονη μαθηματική σκέψη συχνά εστιάζει όχι στον υπολογισμό ενός αποτελέσματος, αλλά στην κατανόηση των σχέσεων και των δομών που

κρύβονται πίσω από αυτό. Η διαπίστωση αυτή βοηθά τους μαθητές/μαθήτριες να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν εξελίσσονται μόνο με την αναζήτηση νέων τύπων, αλλά και με τη δημιουργία νέων εννοιών και θεωρητικών πλαισίων.

Η ιστορία της επιλυσιμότητας των πολυωνυμικών εξισώσεων αναδεικνύει επίσης τη σημασία των αρνητικών αποτελεσμάτων στα μαθηματικά. Η απόδειξη ότι δεν υπάρχει γενικός τύπος επίλυσης για τις εξισώσεις πέμπτου βαθμού δεν αποτέλεσε αποτυχία της μαθηματικής έρευνας, αλλά σημαντική επιστημονική πρόοδος. Μέσα από αυτό το παράδειγμα οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν ότι η μαθηματική γνώση δεν προχωρά μόνο όταν βρίσκονται λύσεις, αλλά και όταν αποδεικνύεται ότι ορισμένες προσεγγίσεις δεν μπορούν να λειτουργήσουν. Η κατανόηση των ορίων μιας μεθόδου αποτελεί συχνά εξίσου σημαντικό βήμα με την ανακάλυψη μιας νέας λύσης.

3.1.5 Η ικασία του Riemann

Η κορύφωση αυτής της ιστορικής διαδρομής έρχεται με το έργο του Bernhard Riemann, ο οποίος, τον 19ο αιώνα, συνέδεσε την κατανομή των πρώτων αριθμών με μια μιγαδική συνάρτηση, τη λεγόμενη ζ-συνάρτηση. Η Εικασία του Riemann, που αφορά τα μηδενικά αυτής της συνάρτησης, εκφράζει με έναν εξαιρετικά αφηρημένο τρόπο την ελπίδα ότι πίσω από τη φαινομενική τυχαιότητα των πρώτων κρύβεται μια βαθιά μαθηματική τάξη. Από διδακτική άποψη, έχει ιδιαίτερη σημασία να τονιστεί ότι η εικασία αυτή παραμένει άλυτη, παρά τις τεράστιες προόδους των μαθηματικών (Arwashan, 2021).

Η διδακτική αξία της Εικασίας του Riemann έγκειται ακριβώς σε αυτή τη σύνδεση του απλού με το βαθύ. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι οι ίδιοι αριθμοί που έμαθαν να ξεχωρίζουν σε μικρές ηλικίες αποτελούν αντικείμενο εντατικής έρευνας μέχρι σήμερα. Το μήνυμα που μεταδίδεται είναι ιδιαίτερα ισχυρό: τα μαθηματικά δεν είναι μια κλειστή συλλογή γνώσεων, αλλά μια ανοιχτή διαδικασία διερεύνησης, όπου ακόμη και τα πιο βασικά αντικείμενα κρύβουν ανεξερεύνητα μυστικά (Nielsen & Semita, 2026).

Επιπλέον, η σύγχρονη σημασία των πρώτων αριθμών προσφέρει μια μοναδική ευκαιρία σύνδεσης των μαθηματικών με την πραγματικότητα. Οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να πληροφορηθούν ότι οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν θεμέλιο της σύγχρονης κρυπτογραφίας και της ασφάλειας των ψηφιακών επικοινωνιών. Η προστασία δεδομένων, οι ηλεκτρονικές συναλλαγές και η ιδιωτικότητα στο διαδίκτυο βασίζονται σε ιδιότητες των πρώτων αριθμών, γεγονός που αναδεικνύει τον άμεσο κοινωνικό και τεχνολογικό τους ρόλο. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι ένα αφηρημένο μαθηματικό πρόβλημα έχει απτές συνέπειες στον σύγχρονο κόσμο (Kashyap, 2026).

Τελικά, η διδακτική αξιοποίηση της Εικασίας του Riemann και της ιστορίας των πρώτων αριθμών συμβάλλει ουσιαστικά στην ευαισθητοποίηση των μαθητών γύρω από τα μαθηματικά. Μέσα από αυτήν, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν ότι η μαθηματική γνώση χτίζεται σταδιακά, ότι η απλότητα δεν αποκλείει το βάθος και ότι τα μαθηματικά, από το Δημοτικό έως τη σύγχρονη έρευνα, αποτελούν ένα ενιαίο και ζωντανό πνευματικό οικοδόμημα (Etheredge, 2025).

Η Εικασία του Riemann προσφέρει μια ιδιαίτερα σημαντική ευκαιρία να συζητηθεί με τους μαθητές/μαθήτριες η έννοια των ορίων της μαθηματικής γνώσης. Συχνά οι μαθητές/μαθήτριες αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως ένα ολοκληρωμένο σύνολο θεωρημάτων και αποτελεσμάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί. Η ύπαρξη ενός προβλήματος το οποίο παραμένει ανοιχτό για περισσότερο από ενάμιση αιώνα δείχνει ότι ακόμη και σήμερα υπάρχουν θεμελιώδη ερωτήματα χωρίς οριστική απάντηση. Η διαπίστωση αυτή συμβάλλει στην κατανόηση ότι τα μαθηματικά αποτελούν μια δυναμική επιστήμη, η οποία εξακολουθεί να εξελίσσεται έως και σήμερα (Vega, 2024).

Η Εικασία του Riemann αναδεικνύει τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν οι εικασίες στην εξέλιξη των μαθηματικών. Πριν από την ύπαρξη μιας απόδειξης, οι μαθηματικοί συχνά παρατηρούν πρότυπα, διατυπώνουν υποθέσεις και αναζητούν επιχειρήματα που να τις στηρίζουν ή να τις διαψεύδουν. Μέσα από τη μελέτη της Εικασίας του Riemann, οι μαθητές/μαθήτριες μπορούν να κατανοήσουν ότι η διατύπωση ενός καλού ερωτήματος ή μιας εύλογης εικασίας αποτελεί συχνά το πρώτο βήμα της μαθηματικής έρευνας. Με αυτόν τον τρόπο καλλιεργείται η δημιουργική σκέψη και ενισχύεται η ενεργή συμμετοχή τους στη μαθηματική διερεύνηση, να θέτει νέα ερωτήματα προς διερεύνηση (Yeo & Yeap, 2009).

3.1.6 Το πρόβλημα P vs NP

Το πρόβλημα P vs NP προσφέρεται ιδιαίτερα για διδακτική αξιοποίηση, καθώς μπορεί να παρουσιαστεί χωρίς προηγμένες μαθηματικές γνώσεις και να συνδεθεί άμεσα με τη βιωματική εμπειρία των μαθητών. Σε αντίθεση με άλλα άλματα προβλήματα που απαιτούν υψηλό επίπεδο θεωρητικής κατάρτισης, το P vs NP βασίζεται σε μια εννοιολογική διάκριση που είναι εύκολα κατανοητή: τη διαφορά ανάμεσα στο «βρίσκω μια λύση» και στο «ελέγχω αν μια λύση είναι σωστή» (Toledo, 2025).

Η βασική ιδέα μπορεί να εισαχθεί στους μαθητές/μαθήτριες μέσα από καθημερινά παραδείγματα. Για παράδειγμα, αν κάποιος δώσει σε έναν μαθητή μια λυμένη εξίσωση ή ένα ολοκληρωμένο παζλ και τον ρωτήσει αν η λύση είναι σωστή, ο έλεγχος γίνεται συνήθως γρήγορα. Αντίθετα, αν ζητηθεί από τον μαθητή να βρει τη λύση από την αρχή, η διαδικασία

μπορεί να αποδειχθεί χρονοβόρα ή ιδιαίτερα δύσκολη. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται άμεσα ότι η επαλήθευση μιας λύσης είναι συχνά πολύ ευκολότερη από την κατασκευή της.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα αφορά προβλήματα τύπου γρίφων ή παιχνιδιών λογικής. Σε ένα πρόβλημα όπως το Sudoku, ο έλεγχος αν μια συμπληρωμένη διάταξη είναι σωστή μπορεί να γίνει σχετικά γρήγορα, εξετάζοντας αν τηρούνται οι κανόνες. Αντίθετα, η εύρεση της λύσης χωρίς βοήθεια απαιτεί στρατηγική, δοκιμές και χρόνο. Το παράδειγμα αυτό βοηθά τους μαθητές/μαθήτριες να κατανοήσουν τη φιλοσοφία της κλάσης NP: προβλήματα των οποίων η λύση, όταν δοθεί, μπορεί να επαληθευτεί αποδοτικά (Pacheco et al., 2025).

Η διδακτική συζήτηση μπορεί να επεκταθεί σε πιο «ρεαλιστικά» σενάρια, όπως το πρόβλημα της δρομολόγησης. Αν δοθεί μια συγκεκριμένη διαδρομή που περνά από πολλές πόλεις και ζητηθεί από τους μαθητές/μαθήτριες να ελέγξουν αν είναι η συντομότερη, ο έλεγχος είναι σχετικά απλός αν συγκριθεί με την προσπάθεια να βρεθεί εξαρχής η βέλτιστη διαδρομή. Μέσα από τέτοια παραδείγματα, οι μαθητές/μαθήτριες οδηγούνται φυσικά στο ερώτημα που βρίσκεται στον πυρήνα του P vs NP: γιατί είναι τόσο εύκολο να ελέγξουμε μια λύση, αλλά τόσο δύσκολο να τη βρούμε; (Nobre Neto, et al., 2018).

Από διδακτική σκοπιά, ιδιαίτερη αξία έχει το γεγονός ότι το πρόβλημα P vs NP παραμένει άλυτο. Αυτό επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να δείξει ότι τα μαθηματικά και η πληροφορική δεν είναι ολοκληρωμένες επιστήμες με απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. Αντίθετα, είναι ζωντανά πεδία έρευνας, στα οποία ακόμη και σήμερα τίθενται θεμελιώδη ερωτήματα για τα όρια της γνώσης και της υπολογιστικής δυνατότητας. Οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται έτσι σε επαφή με τη σύγχρονη μαθηματική σκέψη και κατανοούν ότι η επιστήμη εξελίσσεται μέσα από ερωτήματα που συχνά παραμένουν ανοιχτά.

Επιπλέον, το P vs NP προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και την τεχνολογία. Η αναφορά στην κρυπτογραφία και στην ασφάλεια των ψηφιακών επικοινωνιών μπορεί να λειτουργήσει ως ισχυρό κίνητρο για τους μαθητές/μαθήτριες, δείχνοντας ότι ένα θεωρητικό πρόβλημα έχει άμεσες συνέπειες στον σύγχρονο κόσμο. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι τα μαθηματικά δεν είναι αποκομμένα από την πραγματικότητα, αλλά επηρεάζουν άμεσα την τεχνολογική και κοινωνική εξέλιξη (Wan et al., 2018).

Συνολικά, η διδακτική αξιοποίηση του προβλήματος P vs NP επιτρέπει την καλλιέργεια της κριτικής σκέψης και της εννοιολογικής κατανόησης. Οι μαθητές/μαθήτριες μαθαίνουν να διακρίνουν ανάμεσα στη δυσκολία ενός προβλήματος και στη δυσκολία της λύσης του, ενώ ταυτόχρονα έρχονται σε επαφή με την ιδέα ότι υπάρχουν όρια στην υπολογιστική και

μαθηματική δυνατότητα. Με αυτόν τον τρόπο, το P vs NP λειτουργεί όχι μόνο ως αντικείμενο γνώσης, αλλά και ως εργαλείο για τη βαθύτερη κατανόηση της φύσης των μαθηματικών (Li, et al., 2023).

Σε αντίθεση με πολλά μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται στο σχολείο ως ολοκληρωμένες γνώσεις, το πρόβλημα P έναντι NP δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές/μαθήτριες να έρθουν σε επαφή με ένα ερώτημα που παραμένει ανοιχτό στη σύγχρονη επιστημονική κοινότητα. Η διαπίστωση ότι ακόμη και σήμερα δεν είναι γνωστό αν κάθε πρόβλημα του οποίου η λύση μπορεί να ελεγχθεί γρήγορα μπορεί και να λυθεί γρήγορα, συμβάλλει στην κατανόηση της πραγματικής φύσης της μαθηματικής έρευνας. Οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι η επιστήμη δεν αποτελεί ένα πλήρως ολοκληρωμένο οικοδόμημα, αλλά μια διαρκή διαδικασία αναζήτησης, μέσα στην οποία εξακολουθούν να υπάρχουν σημαντικά αναπάντητα ερωτήματα (Vega, 2024).

Η διδακτική αξία του προβλήματος P έναντι NP δεν περιορίζεται στην κατανόηση εννοιών της πληροφορικής. Μέσα από τα παραδείγματα που συνδέονται με αυτό, οι μαθητές/μαθήτριες καλούνται να εξετάσουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, να συγκρίνουν εναλλακτικές προσεγγίσεις και να αξιολογήσουν την αποτελεσματικότητά τους. Με τον τρόπο αυτό καλλιεργείται η ικανότητα λήψης αποφάσεων, η οργάνωση της σκέψης και η ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων που είναι χρήσιμες όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και σε πολλές άλλες γνωστικές περιοχές (Cook, 2004).

3.2 Παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης στην τάξη

Ο Τετραγωνισμός του κύκλου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην ιστορία των μαθηματικών. Από την αρχαιότητα έως και τον 19ο αιώνα, πλήθος μαθηματικών επιχείρησαν να κατασκευάσουν, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη, ένα τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με εκείνο ενός δοσμένου κύκλου. Το πρόβλημα φαινόταν αρχικά καθαρά γεωμετρικό, καθώς αφορούσε αποκλειστικά γεωμετρικές κατασκευές και σχέσεις επιφανειών.

Ωστόσο, η οριστική λύση του προβλήματος δεν προήλθε από τη γεωμετρία. Αντίθετα, χρειάστηκε μια ριζική αλλαγή μαθηματικού πλαισίου. Η αδυναμία τετραγωνισμού του κύκλου αποδείχθηκε τελικά μέσω της άλγεβρας, της θεωρίας αριθμών και της ανάλυσης. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής σκέψης: πολλές φορές ένα πρόβλημα δεν επιλύεται μέσα στο αρχικό θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο διατυπώνεται, αλλά απαιτεί μετάβαση σε μια διαφορετική μαθηματική δομή ή αναπαράσταση (Crippa, 2019).

Η καθοριστική πρόοδος πραγματοποιήθηκε το 1882 από τον Ferdinand von Lindemann, ο οποίος απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός. Ένας υπερβατικός αριθμός δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Η απόδειξη αυτή βασίστηκε σε αποτελέσματα που σχετίζονταν με την εκθετική συνάρτηση και τους μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή σε έννοιες φαινομενικά απομακρυσμένες από το αρχικό γεωμετρικό πρόβλημα (Chen, 2025).

Η ουσία της απόδειξης ήταν ότι, εάν ο αριθμός π ήταν αλγεβρικός, τότε μέσω της σχέσης του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$, θα προέκυπτε αντίφαση με τα θεωρήματα περί υπερβατικότητας της εκθετικής συνάρτησης. Επομένως, ο π είναι υπερβατικός και άρα δεν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη. Κατά συνέπεια, ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος.

Το ιδιαίτερα ενδιαφέρον παιδαγωγικό στοιχείο εδώ είναι ότι το πρόβλημα δεν λύθηκε παραμένοντας στη γεωμετρία. Οι μαθηματικοί «μετέφεραν» το πρόβλημα σε ένα διαφορετικό μαθηματικό πεδίο, όπου μπορούσαν να το μελετήσουν αποτελεσματικότερα. Με άλλα λόγια, η λύση προέκυψε μέσω αλλαγής αναπαράστασης και θεωρητικού πλαισίου (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006).

Η παρατήρηση αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί δημιουργικά στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι μαθητές/μαθήτριες συχνά αντιμετωπίζουν τις μαθηματικές έννοιες ως απομονωμένες μεταξύ τους, χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι διαφορετικοί κλάδοι των μαθηματικών συνεργάζονται δυναμικά για την επίλυση προβλημάτων. Η περίπτωση του τετραγωνισμού του κύκλου αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της εσωτερικής «διεπιστημονικότητας» των μαθηματικών (Mahlabela, & Bansilal, 2015). Μια αντίστοιχη κατάσταση συναντάται και στα μαθηματικά της Γ' Λυκείου κατά τη μελέτη εξισώσεων. Συχνά ο στόχος είναι να αποδειχθεί ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της ή σε ένα συγκεκριμένο διάστημα (α, β) . Παρόλα αυτά, η απόδειξη δεν πραγματοποιείται συνήθως δουλεύοντας απευθείας πάνω στην εξίσωση. Αντίθετα, ορίζεται μια νέα συνάρτηση της μορφής $f(x)=0$.

Το πρόβλημα μετατρέπεται σε γεωμετρικό ή αναλυτικό πρόβλημα μελέτης της γραφικής της παράστασης. Ο μαθητής εξετάζει τη συνέχεια, τη μονοτονία ή το σύνολο τιμών της συνάρτησης και αποδεικνύει ότι η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τουλάχιστον ένα σημείο χρησιμοποιώντας το σύνολο τιμών της συνάρτησης σε συνδυασμό με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Ή αν ζητάμε την ύπαρξη ρίζας σε ένα διάστημα προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτησή μας ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Η τομή αυτή ισοδυναμεί με ύπαρξη ρίζας της αρχικής εξίσωσης (Tall & Katz, 2014).

Επομένως, όπως ακριβώς στην περίπτωση του τετραγωνισμού του κύκλου, έτσι και εδώ η λύση προκύπτει μέσω αλλαγής μαθηματικής αναπαράστασης. Το αρχικό πρόβλημα μεταφέρεται σε διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο, όπου γίνεται ευκολότερα διαχειρίσιμο. Η σύνδεση αυτή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές/μαθήτριες να αντιληφθούν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα δεν περιορίζεται στην εκτέλεση υπολογισμών, αλλά περιλαμβάνει και την ικανότητα αλλαγής οπτικής γωνίας, επιλογής κατάλληλης αναπαράστασης και μετάβασης σε νέο θεωρητικό περιβάλλον (Lee et al., 2025).

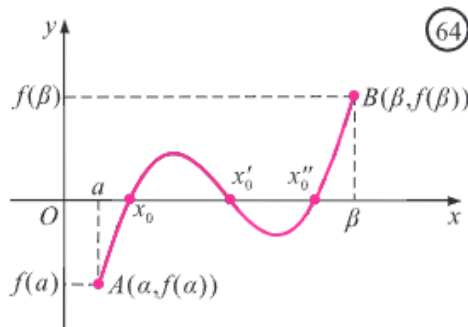
Ο Τετραγωνισμός του κύκλου μπορεί να αποτελέσει ένα ιδιαίτερα γόνιμο διδακτικό εργαλείο για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όχι μόνο λόγω της ιστορικής του σημασίας αλλά κυρίως λόγω της δυνατότητας που προσφέρει για ανάδειξη της φύσης της μαθηματικής σκέψης. Μέσα από το συγκεκριμένο πρόβλημα, οι μαθητές/μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν ότι στα μαθηματικά η επίλυση ενός προβλήματος δεν πραγματοποιείται πάντοτε μέσα στο αρχικό θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο αυτό διατυπώνεται (Weigand, et al., 2025). Αντίθετα, πολλές φορές απαιτείται μετάβαση σε διαφορετική μαθηματική δομή ή αλλαγή αναπαράστασης. Θα γίνει μία προσπάθεια να αναπαραστήσουμε ένα πραγματικό σενάριο το οποίο διαδραματίζεται στη σχολική αίθουσα.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στη σχολική αίθουσα λοιπόν, την στιγμή που ο καθηγητής έχει παραδώσει την έννοια της συνέχειας έρχεται η στιγμή να διατυπώσει το θεώρημα του Bolzano ακολουθώντας το σχολικό εγχειρίδιο.

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Εικόνα 1 Θεώρημα Bolzano

Σιγά σιγά γίνεται ξεκάθαρο στους μαθητές/μαθήτριες ότι το θεώρημα αυτό είναι ένα ισχυρό εργαλείο των συναρτήσεων. Μετά από λίγο όταν ξεκινά να λύνει στον πίνακα τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου φτάνει στην άσκηση 6

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & , \quad x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x < 0 \\ \sin x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

$$\text{i) } f(x) = \eta\mu(\sin x) \quad \text{ii) } f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$\text{iii) } f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \quad \text{iv) } f(x) = e^{\eta\mu x}$$

$$\text{v) } f(x) = \ln(\ln x)$$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

7. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f , να βρείτε έναν ακέραιο a τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(a, a + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

$$\text{i) } f(x) = x^3 + x - 1$$

$$\text{ii) } f(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$\text{iii) } f(x) = x^4 + 2x - 4$$

$$\text{iv) } f(x) = -x^3 + x + 2$$

Εικόνα 2 Ασκήσεις σχολικού

Σε αυτή την άσκηση πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

Προφανώς οι μαθητές/μαθήτριες λόγω της εμπειρίας τους θα επιδιώξουν να επιλύσουν την εξίσωση αυτή με κάποιον τρόπο ευελπιστώντας μία από τις λύσεις που θα βρουν να ανήκει στο εν λόγω διάστημα. Μάλιστα ο/η εκπαιδευτικός πρέπει να τους προτρέψει να δοκιμάσουν να λύσουν την εξίσωση και ας ξέρει ο ίδιος ότι δεν γίνεται να λυθεί αυτή η εξίσωση με κάποιον από τους συνήθεις τρόπους. Μερικές φορές στην εκπαιδευτική διαδικασία όταν κάνουμε σαν εκπαιδευτικοί κάποια σκόπιμα λάθη πετυχαίνουμε εντυπωσιακά αποτελέσματα (Holmlund, 2026). Στη συνέχεια προσπαθούν οι μαθητές/μαθήτριες να βρουν μία προφανή ρίζα στο εν λόγω διάστημα. Δυστυχώς είναι μάταιο, ο/η εκπαιδευτικός το ξέρει αλλά πρέπει να τους αφήσει να διασχίσουν όλο το δρόμο. Και μετά από λίγο συνειδητοποιούν όλοι ότι όλες οι απόπειρες επίλυσης της εξίσωσης είναι μάταιες. Τότε έρχεται η στιγμή που ο/η εκπαιδευτικός μας θα προτρέψει τους μαθητές/μαθήτριες να φέρουν όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος θεωρώντας μία καινούρια συνάρτηση (Montuoro, 2016).

Τότε το πρόβλημα μετασχηματίζεται από την αρχική μορφή της εξίσωσης στην επίλυση της εξίσωσης $f(x)=0$. Αυτό το σημείο είναι το κρίσιμο σημείο στην ιστορία μας. Οι μαθητές/μαθήτριες στην μεγάλη πλειοψηφία τους αδυνατούν να κατανοήσουν αυτή την αλλαγή. Δεν μπορούν να αντιληφθούν πως από τις απόπειρες επίλυσης μιας εξίσωσης καταλήγουμε να ψάχνουμε τις ρίζες μιας συνάρτησης.

Και κάπου εδώ η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αφού έχει επενδυθεί μία διδακτική ώρα σε άκαρπες προσπάθειες επίλυσης της εξίσωσης, αφού έχει μεταφερθεί το πρόβλημα από τον κόσμο των εξισώσεων στον κόσμο των συναρτήσεων, αφού έχει κεντρίσει τα βλέμματα των μαθητών πάνω του, ήρθε η ώρα να παρουσιάσει τον τετραγωνισμό του κύκλου και την απρόσιτη και λύση εκτός πλαισίου του Lidemann (Romero, et al., 2023).

Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί αρχικά να αφιερώσει μία διδακτική ώρα στην ιστορική αναδρομή του προβλήματος. Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάζεται η προσπάθεια των αρχαίων μαθηματικών να κατασκευάσουν, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη, ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού με έναν δοσμένο κύκλο. Παράλληλα, τονίζεται ότι, αν και σήμερα γνωρίζουμε τρόπους υπολογισμού και προσεγγιστικής «τετραγώνισης» του κύκλου με άλλες μεθόδους, ο αυστηρός περιορισμός της χρήσης μόνο κανόνα και διαβήτη καθιστά το πρόβλημα αδύνατο (Gessner et al., 2017).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται συνοπτικά, η συμβολή του Ferdinand von Lindemann, ο οποίος απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός. Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να αναδείξει ότι

η απόδειξη αυτή δεν πραγματοποιήθηκε μέσα στη γεωμετρία, αλλά μέσω διαφορετικών μαθηματικών πεδίων, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση και η θεωρία αριθμών. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές/μαθήτριες οδηγούνται στη διαπίστωση ότι το πρόβλημα «μεταφέρθηκε» ουσιαστικά από ένα «δωμάτιο» των μαθηματικών σε ένα άλλο, όπου κατέστη δυνατή η οριστική του αντιμετώπιση (Schwartz, 2015).

Η συγκεκριμένη ιδέα μπορεί να αποτελέσει ισχυρή εφόρμηση για τη διδασκαλία εννοιών της Γ' Λυκείου. Ο εκπαιδευτικός εισάγοντας το Θεώρημα Bolzano προσπαθεί να επιχειρήσει μια σύνδεση ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις. Οι μαθητές/μαθήτριες συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση του γιατί, προκειμένου να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση, μεταβαίνουμε στη μελέτη μιας συνάρτησης και της γραφικής της παράστασης (Durand-Guerrier, 2022). Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να επισημάνει ότι συμβαίνει κάτι ανάλογο με τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ενώ αρχικά το ζητούμενο είναι η επίλυση μιας εξίσωσης, τελικά το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε πρόβλημα μελέτης μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, αντί να εξετάζεται απευθείας η εξίσωση $f(x)=0$.

Ο μαθητής μελετά τη συνάρτηση f , τη συνέχεια και τη γραφική της παράσταση, ώστε να αποδείξει ότι η καμπύλη τέμνει τον άξονα x' σε τουλάχιστον ένα σημείο. Η τομή αυτή ισοδυναμεί με ύπαρξη ρίζας της αρχικής εξίσωσης.

Έτσι, οι μαθητές/μαθήτριες αντιλαμβάνονται, ότι η μαθηματική σκέψη δεν περιορίζεται σε άμεσους υπολογισμούς, αλλά συχνά απαιτεί αλλαγή οπτικής γωνίας και μετάβαση σε διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο. Η σύνδεση του ιστορικού προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με το θεώρημα Bolzano μπορεί επομένως να συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη βαθύτερης μαθηματικής κατανόησης και στη συνειδητοποίηση της ενότητας των μαθηματικών κλάδων (Bardi, 2025).

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα επιτρέπει επίσης στους μαθητές/μαθήτριες να αντιληφθούν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δεν εξαρτάται πάντοτε από την άμεση εφαρμογή ενός γνωστού τύπου ή αλγορίθμου. Συχνά απαιτείται η αναδιατύπωση του προβλήματος, η αλλαγή αναπαράστασης ή η μεταφορά του σε διαφορετικό μαθηματικό πλαίσιο. Η ικανότητα αυτή αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής σκέψης και συνδέεται με ανώτερες δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Μέσα από το παράδειγμα του τετραγωνισμού του κύκλου και τη σύνδεσή του με το Θεώρημα Bolzano, οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται σε επαφή με στρατηγικές που χρησιμοποιούνται όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και σε ευρύτερα επιστημονικά πεδία (Liljedahl, et al., 2016).

Η διδακτική παρέμβαση δεν στοχεύει στην παθητική μετάδοση γνώσεων αλλά στην ενεργή οικοδόμηση της γνώσης από τον μαθητή. Μέσα από τη διερεύνηση, τη διατύπωση υποθέσεων

και τη σταδιακή αναζήτηση κατάλληλων εργαλείων, οι μαθητές/μαθήτριες οικοδομούν οι ίδιοι τη μαθηματική κατανόηση, γεγονός που συνάδει με τις βασικές αρχές των εποικοδομιστικών θεωριών μάθησης (Romdhon, et al.,2024).

3.3 Συμπεράσματα

Η μελέτη των άλυτων προβλημάτων των Μαθηματικών αποκαλύπτει ότι η εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης δεν υπήρξε μια γραμμική πορεία συνεχών επιτυχιών και οριστικών απαντήσεων. Αντίθετα, η ιστορία των Μαθηματικών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με ερωτήματα, αβεβαιότητες, αποτυχίες και επίμονες προσπάθειες επίλυσης προβλημάτων που, σε πολλές περιπτώσεις, παρέμειναν άλυτα για αιώνες. Από τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας έως τα προβλήματα του Hilbert και τα Millennium Prize Problems, τα άλυτα προβλήματα λειτούργησαν ως ισχυρά κίνητρα για την ανάπτυξη νέων θεωριών, την εισαγωγή καινοτόμων μεθόδων και τη διεύρυνση των ορίων της μαθηματικής γνώσης.

Η ιστορική προσέγγιση των προβλημάτων αυτών ανέδειξε ότι η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί ένα στατικό και αμετάβλητο σύνολο αληθειών, αλλά μια δυναμική ανθρώπινη δραστηριότητα, η οποία εξελίσσεται μέσα από τη διερεύνηση, τον προβληματισμό και τη δημιουργική αναζήτηση. Οι προσπάθειες επίλυσης των άλυτων προβλημάτων, ακόμη και όταν δεν οδηγούν σε οριστική λύση, συμβάλλουν ουσιαστικά στην πρόοδο της επιστήμης και στην κατανόηση της ίδιας της φύσης των Μαθηματικών.

Παράλληλα, η διερεύνηση της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών και ειδικότερα των άλυτων προβλημάτων κατέδειξε ότι αυτά μπορούν να αποτελέσουν ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό παιδαγωγικό εργαλείο. Η ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στη διδακτική πράξη μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της διερευνητικής στάσης των μαθητών, ενώ παράλληλα ενισχύει το ενδιαφέρον τους για τα Μαθηματικά και προάγει μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, η παρουσίαση των Μαθηματικών ως μιας εξελισσόμενης ανθρώπινης δραστηριότητας συμβάλλει στην άρση στερεοτυπικών αντιλήψεων που τα αντιμετωπίζουν ως ένα απομονωμένο και αυστηρά τυπικό γνωστικό αντικείμενο.

Συμπερασματικά, τα άλυτα προβλήματα δεν αποτελούν απλώς ιστορικά ή ερευνητικά αντικείμενα, αλλά διαχρονικές πηγές έμπνευσης, δημιουργικότητας και επιστημονικής προόδου. Η αξιοποίησή τους στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση μιας περισσότερο ουσιαστικής, διερευνητικής και ανθρωποκεντρικής προσέγγισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών, αναδεικνύοντας τον δυναμικό χαρακτήρα

της επιστήμης και ενθαρρύνοντας τους μαθητές/μαθήτριες να προσεγγίσουν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως ένα σύνολο γνώσεων, αλλά και ως μια ανοιχτή διαδικασία αναζήτησης και ανακάλυψης.

Η σύντομη αυτή ιστορική αναδρομή των άλυτων προβλημάτων και η εισήγηση για αξιοποίησή συγκεκριμένων παραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν στόχευε στην πλήρη μελέτη του θέματος, αλλά στην ανάδειξη πτυχών που αφορούν στην ανάπτυξη στρατηγικών λύσης προβλήματος και των δεξιοτήτων επιμονής στην επίλυση δύσκολων καταστάσεων που οδηγούν πολλές φορές σε γνωστικά αδιέξοδα. Μία μελλοντική εργασία θα μπορούσε να προχωρήσει στην ανάπτυξη συγκεκριμένου ερευνητικού προγράμματος και στη διερεύνηση των αποτελεσμάτων του στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, των αντιλήψεων για τη φύση των μαθηματικών και των στρατηγικών επιμονής στη λύση προβλήματος.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Agarwal, R. P., & Agarwal, H. (2021). Origin of irrational numbers and their approximations. *Computation*, 9(3), 29. <https://doi.org/10.3390/computation9030029>
- Arwashan, N. (2021). *The Riemann hypothesis and the distribution of prime numbers*.
- Bair, J., Blaszczyk, P., Ely, R., Henry, V., Kanovei, V., Katz, K., Katz, M., Kutateladze, S., McGaffey, T., Reeder, P., Schaps, D., Sherry, D., & Shnider, S. (2017). Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler. *Journal for General Philosophy of Science*, 48. <https://doi.org/10.1007/s10838-016-9334-z>
- Baragar, A. (2001). *A survey of classical and modern geometries: With computer activities*. Prentice Hall.
- Bardi, A. (2025). The historicity of mathematics as a philosophical problem: New insights. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70658-0_164-1
- Basta, O. (2024). Predicting prime numbers using the Riemann zeta function: A novel approach. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17551.80801>
- Bayer, P. (2017). The Riemann hypothesis: The great pending challenge. *Mètode Revista de difusió de la investigació*. <https://doi.org/10.7203/metode.8.8903>
- Bell, E. T. (1937). *Men of mathematics: The lives and achievements of the great mathematicians from Zeno to Poincaré*. Simon & Schuster.
- Bell, E. T. (1986). *Men of mathematics* (Touchstone ed.). Simon & Schuster. (Επανεκδόση του 1937)
- Ben-Ari, M. (2022). Trisection of an angle. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13566-8_2
- Berinde, V. (2004). A geometric construction using ruler and compass. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7889-0_3
- Blum-Smith, B., & Coskey, S. (2013). The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory. *The College Mathematics Journal*, 48. <https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.1.18>
- Bodner, M. (2025). Hilbert's problems, Kant, and decidability. *Archive for History of Exact Sciences*, 79(1), 12. <https://doi.org/10.1007/s00407-025-00350-y>
- Boucard, J., & Morel, T. (2022). New objects, questions, and methods in the history of mathematics. *Histories*, 2(3), 341-351. <https://doi.org/10.3390/histories2030025>
- Boulay, J.-Y. (2023). The novel concept of ultimate numbers: Only two primary sets of whole numbers. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.32843.34081/5>
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). Wiley.
- Burger, E. B., & Starbird, M. P. (2004). The heart of mathematics: An invitation to effective thinking. *American Mathematical Monthly*, 108, 573.

- Challoumis, C. (2023). The three classic problems of antiquity. *Academia Letters*.
<https://doi.org/10.20935/AL6400>
- Chatterjee, R. (2021). Fundamental concepts of history of mathematics. *Research Review International Journal of Multidisciplinary*, 6, 43-59.
<https://doi.org/10.31305/rrijm.2021.v06.i07.008>
- Chen, W. (2025). A critical examination of exponential structures in complex analysis and their application to the transcendence of $e + \pi$.
<https://doi.org/10.22541/au.176099557.79585590/v1>
- Chorlay, R., Clark, K., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 54. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>
- Connes, A. (2026). The Riemann hypothesis: Past, present and a letter through time.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2602.04022>
- Cook, S. (2004). The importance of the P versus NP question. *Journal of the ACM*, 50.
<https://doi.org/10.1145/602382.602398>
- Corry, L. (2015). *A brief history of numbers*. Oxford University Press.
- Crippa, D. (2019). *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: A debate among Gregory, Huygens and Leibniz*. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-01638-8>
- Dart, B. (2015). Gauss, Riemann, and the conceptual foundations of non-Euclidean geometry.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21571.27687>
- Davis, P. J. (2003). *Mathematics and common sense: A case of creative tension*. A K Peters.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhäuser.
- Dengsø, J. (2023). The living mathematics: Open problems and their role in mathematical development. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 28(1), 5-22.
- Dengsø, M. (2023). *The diachronic mind institutionalized: On the distributed organization of cognition and its challenges*.
- Devlin, K. J. (2003). *The millennium problems*. Basic Books.
- Dickson, L. E. (2005). Goldbach's empirical theorem: Every integer is a sum of two primes. In *History of the theory of numbers: Vol. 1. Divisibility and primality* (pp. 421-424). Dover.
- Dongfang, X. D. (2026). Did Wiles actually prove Fermat's last theorem?
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.20771.00801>
- Durand-Guerrier, V. (2022). On the dialectical relationship between truth and proof: Bolzano, Cauchy and the intermediate value theorem. *HAL (Le Centre Pour la Communication Scientifique Directe)*.

- Dutilh Novaes, C. (2025). The philosophy of mathematical practice. In *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2025 ed.). Stanford University.
<https://plato.stanford.edu/entries/mathematical-practice/>
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. State University of New York Press.
- Esteve, M. R. (2025). The role of Leonhard Euler (1707-1783) in the development and transmission of scientific knowledge at Saint Petersburg Academy of Sciences.
- Ferraro, G. (2012). Euler, infinitesimals and limits.
- Ferreira, J. (2017). The pattern of prime numbers. *Applied Mathematics*, 08, 180-192.
<https://doi.org/10.4236/am.2017.82015>
- Ferreirós, J. (2010). The crisis in the foundations of mathematics. *The Princeton Companion to Mathematics*, 142-156.
- Gargote, A., Babar, M., Gore, H., & Khairkhar, V. (2026). A comprehensive study on the prime number theorem: Historical development, proofs, and modern applications. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, 14, 1-8.
<https://doi.org/10.26438/ijcse.v14i4.7343>
- Gessen, M. (2009). *Perfect rigor: A genius and the mathematical breakthrough of the century*. Houghton Mifflin Harcourt.
- Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (2017). Mathematical instruments between material artifacts and ideal machines: Their scientific and social role before 1950. *Oberwolfach Reports*, 14, 3471-3560. <https://doi.org/10.4171/OWR/2017/58>
- Gevorkyan, Y. (2023). The proof of Fermat's last theorem based on the geometric principle. *EUREKA: Physics and Engineering*, 156-163. <https://doi.org/10.21303/2461-4262.2023.003109>
- Gray, J. (2012). Poincaré replies to Hilbert: On the future of mathematics ca. 1908. *The Mathematical Intelligencer*, 34. <https://doi.org/10.1007/s00283-012-9299-7>
- Greither, C. (2018). Jeremy Gray: A history of abstract algebra. From algebraic equations to modern algebra: Springer, 2018, XXIV + 415 S. *Mathematische Semesterberichte*, 66.
<https://doi.org/10.1007/s00591-018-00245-w>
- Hardy, G. H. (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge University Press.
- Haug, E. (2018). The three ancient problems and their role in the history of mathematics. *Mathematics Today*, 54(2), 68-74.
- Haug, E. (2023). Squaring the circle is possible when taking into consideration the Heisenberg uncertainty principle. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 11, 478-483. <https://doi.org/10.4236/jamp.2023.112029>
- Hazewinkel, M. (1990). Hilbert's 1990 ICM lecture: The 23 problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

- Heymann, Y. (2018). An investigation of the non-trivial zeros of the Riemann zeta function. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.04700>
- Honwei, S., Zhou, M., Delong, Z., Xingyi, J., & Songting, H. (2019). Even numbers are the sum of two prime numbers. *Greener Journal of Science, Engineering and Technological Research*, 9, 8-11. <https://doi.org/10.15580/GJSETR.2019.1.040919068>
- Hosch, W. L. (2026, February 27). Millennium problem. *Encyclopedia Britannica*. <https://www.britannica.com/science/Millennium-Problem>
- Hunt, N., Lapp, D. A., & Powell, C. (2001). Using history of mathematics in the classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(7), 416-421.
- Jr, J. (2015). The prime number theorem. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17368-9_10
- Kahle, R., & Oitavem, I. (2018). What is Hilbert's 24th problem? *Kairos: Journal of Philosophy & Science*, 20, 1-11. <https://doi.org/10.2478/kjps-2018-0001>
- Kanamori, A. (2003). *The higher infinite: Large cardinals in set theory from their beginnings*. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-88867-3>
- Karatsuba, A. (2009). Euler and number theory. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 274, 169-179. <https://doi.org/10.1134/S0081543811070042>
- Karp, A., & Furinghetti, F. (2018). *History of mathematics teaching and learning: Achievements, problems, prospects*.
- Kashyap, N. (2026). Role of prime numbers in cryptography. *Journal of Advances and Scholarly Researches in Allied Education*, 23, 81-89. <https://doi.org/10.29070/ddy24369>
- Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Pearson Education.
- Kilani, I. (2023). Fermat's last theorem: A historical and mathematical overview. <https://doi.org/10.22541/essoar.169447369.92321625/v1>
- Kimuya, A. (2017). The angle trisection solution (a compass-straightedge (ruler) construction). *Journal of Advances in Mathematics*, 13, 7308-7332. <https://doi.org/10.24297/jam.v13i4.6175>
- Kimuya, A. M. (2024). Revisiting the classical problems of antiquity: Constructibility and algebraic constraints. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2024, Article 1238574. <https://doi.org/10.1155/2024/1238574>
- Kotnik, T. (2008). The prime-counting function and its analytic approximations. *Advances in Computational Mathematics*, 29, 55-70. <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9039-2>
- Kouneiher, J. (2019). Foundations of mathematics and physics one century after Hilbert: New perspectives. *Notices of the American Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1090/NOTI1964>

- Kupczynski, M. (2024). On the impossibility of squaring the circle: A historical and algebraic perspective. *Journal of Mathematical History*, 3(1), 12-29.
- Lee, J., Dawes, M., & Ostwald, M. (2025). Squaring the circle. https://doi.org/10.1007/978-3-031-86390-5_9
- Li, W., Huang, J.-Y., Liu, C.-Y., Tseng, J., & Wang, S.-P. (2023). A study on the relationship between students' learning engagements and higher-order thinking skills in programming learning. *Thinking Skills and Creativity*, 49, Article 101369. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101369>
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1
- Madisa, M. (2026a). The Goldbach conjecture. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26213.46561>
- Madisa, M. (2026b). The Riemann hypothesis. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28730.04804>
- Mallick, S., Hamburger, N., & Mallick, S. (2016). *Proof of P vs. NP Millennium Prize Problem #3 (Clay Mathematics Institute)* (reentry).
- Mancosu, P., Galvan, S., & Zach, R. (2021). *An introduction to proof theory: Normalization, cut-elimination, and consistency proofs*. Oxford University Press.
- Mantzakouras, N. (2021). The Riemann hypothesis and distribution of the primes. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.24641.48485>
- Masià, R. (2016). A new reading of Archytas' doubling of the cube and its implications. *Archive for History of Exact Sciences*, 70. <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0165-9>
- Matthews, M. (2022). Euclid's legacy in modern geometry education. *Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100961. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100961>
- Mazur, B., & Stein, W. A. (2016). *Prime numbers and the Riemann hypothesis*.
- McCleary, J. (2024). A history of mathematical impossibility: By Jesper Lützen. *The Mathematical Intelligencer*, 47. <https://doi.org/10.1007/s00283-024-10374-x>
- Minati, G. (2019). Unsolvable problems and new perspectives in mathematics education. *Systema: Connecting Matter, Life, Culture and Technology*, 7(1), 24-35.
- Morris, S., Jones, A., & Pearson, K. (2022). *Abstract algebra and famous impossibilities, squaring the circle, doubling the cube, trisecting an angle, and solving quintic equations*. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05698-7>
- Movshovitz-Hadar, N., & Kleiner, I. (2009). Intellectual courage and mathematical creativity. https://doi.org/10.1163/9789087909352_004
- Mthimkulu, S. P. (2021). The relation of the Riemann zeta function and the prime number theorem.
- Nasar, S., & Gruber, D. (2006, August 21). Manifold destiny: A legendary problem and the battle over who solved it. *The New Yorker*.

- Nash, J., Jr., & Rassias, M. (2016). *Open problems in mathematics*.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-32162-2>
- Netz, R. (2004). *The transformation of mathematics in the early Mediterranean world: From problems to equations*. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511720000>
- Nielsen, J., & Semita, L. (2026). *The proof of the Riemann hypothesis*.
- Orús-Lacort, M., Orus, R., & Jouis, C. (2023). Analyzing twin primes, Goldbach's strong conjecture and Polignac's conjecture. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14753.38249>
- Pacheco, M., Somenzi, F., Srinivas, D., & Trivedi, A. (2025). Explaining Hitori puzzles: Neurosymbolic proof staging for sequential decisions.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.14294>
- Porras, J. (2016). Solution for Fermat's last theorem. *Revista Científica "General José María Córdova,"* 14, 412-419.
- Powell, A. (2025). An analysis of the continuum hypothesis. *Axioms*, 14(3), 154.
<https://doi.org/10.3390/axioms14030154>
- Rediske, A. (2018). The trisection of an arbitrary angle. *Journal of Advances in Mathematics*, 14, 7640-7669. <https://doi.org/10.24297/jam.v14i2.7402>
- Reid, C. (1996). *Hilbert* (Copernicus ed.). Springer-Verlag. (Πρωτότυπη έκδοση: 1970)
- Remmert, R., & Burckel, R. B. (1990). *Theory of complex functions*.
- Richeson, D. S. (2019). *Tales of impossibility: The 2000-year quest to solve the mathematical problems of antiquity*. Princeton University Press.
- Romdhon, J., Masrifah, M., Shiyama, N., & Suharyati, H. (2024). Applying constructivist learning theory to enhance student learning outcomes in elementary schools. *International Journal of Sustainable Development & Future Society*, 2, 62-69.
<https://doi.org/10.62157/ijstdfs.v2i2.73>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
<https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schwartz, R. (2015). Pi is transcendental: Von Lindemann's proof made accessible to today's undergraduates.
- Shaghaghi, M. (2024). *Proof of Goldbach's conjecture*.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics*. Oxford University Press.
- Simon, S. (1998). *Fermat's last theorem* (2nd ed.). Fourth Estate.
- Singh, S. (1997). *Fermat's last theorem: The story of a riddle that confounded the world's greatest minds for 358 years*. Fourth Estate.

- Son, J. (2024). Constructible numbers and geometric impossibility: A modern algebraic approach. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(2), 45-60.
- Son, T. (2024). Circling the square with straightedge and compass in Euclidean geometry. 70, 16-26. <https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V70I1P103>
- Son, T. (2025). An exact and simple solution to the "trisecting an angle" problem using straightedge and compass. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*, 12, 419-431. <https://doi.org/10.36347/sjpms.2025.v12i09.003>
- Son, T. (2026). Exact and simple solution to "halving a cube" problem with straightedge and compass in Euclidean geometry. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*, 13, 218-227. <https://doi.org/10.36347/sjpms.2026.v13i05.001>
- Spigler, R. (2025). A brief survey on the Riemann hypothesis and some attempts to prove it. *Symmetry*, 17, 225. <https://doi.org/10.3390/sym17020225>
- Stewart, I. (2015). *Galois theory* (4th ed.). CRC Press.
- Stewart, I. (2022). *Galois theory* (5th ed.). Chapman and Hall/CRC.
- Stigler, S. (2022). Ellis on mathematical statistics and probability. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85258-0_5
- Stillwell, J. (2020). *Mathematics and its history: A concise edition*. Springer.
- Stoeltzner, M. (2015). Hilbert's axiomatic method and Carnap's general axiomatics. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 53. <https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2015.05.005>
- Szpiro, G. G. (2007). *Poincaré's prize: The hundred-year quest to solve one of math's greatest puzzles*. Dutton Adult.
- Sözen Özdoğan, S., Akyuz, D., & Cakiroglu, E. (2020). A phenomenological study: Incorporating the history of mathematics from the perspective of teachers. <https://doi.org/10.5040/9798216457107.ch-007>
- Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 86. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9531-9>
- Toledo Morales, O. (2025). *The P vs. NP problem: Advanced mathematical modeling, philosophical foundations, and the frontier of scientific discovery*.
- Valtancoli, P. (2026). On the analytic continuation of the Riemann zeta function. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2605.28610>
- Vega, F. (2021). Proof of the Riemann hypothesis. <https://doi.org/10.33774/coe-2021-s7270>
- Vega, F. (2024). Note for the P versus NP problem. <https://doi.org/10.33774/coe-2024-pmlqm-v3>

- Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2006). *Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments*.
- Wan Hussin, W. N. T., & Shukor, N. (2018). Problem based learning to enhance students' critical thinking skill via online tools. *Asian Social Science*, 15, 14.
<https://doi.org/10.5539/ass.v15n1p14>
- Weigand, H. G., Hollebrands, K., & Maschietto, M. (2025). Geometry education at secondary level - a systematic literature review. *ZDM Mathematics Education*, 57, 829-843.
<https://doi.org/10.1007/s11858-025-01703-1>
- Woodin, W. (2001). The continuum hypothesis I. *Notices of the American Mathematical Society*, 48.
- Yeo, J., & Yeap, B. (2009). Investigating the processes of mathematical investigation.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2320.4727>
- Zach, R. (2001). Hilbert's finitism: Historical, philosophical, and metamathematical perspectives.