ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ FIBONACCI

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΓΟΥΝΑΡΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ

ΠΑΤΡΑ, ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ, 2023

«ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ FIBONACCI»

«ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΓΟΥΝΑΡΗΣ»

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ – ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΠΟΥΚΑΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ – ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΑΤΡΑ, ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ, 2023

Στον κύριο Ανούση Μιχαήλ και τον κύριο Δημήτρη Χελιώτη, αποστέλλω τις θερμές μου ευχαριστίες για την καθοδήγηση και την υποστήριξή τους καθ' όλη την διάρκεια διεκπεραίωσης της παρούσας διπλωματικής, που στάθηκαν αρωγοί και καθοδηγητές σε όλη τη πορεία.

Ευχαριστώ πολύ την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τη μητέρα μου, που με υποστήριξε και ανέχτηκε τις ιδιοτροπίες μου όλο αυτό το διάστημα δείχνοντας κατανόηση.

Ευχαριστώ τη γυναίκα μου, που στάθηκε δίπλα μου και πολλές φορές ξενύχτησε μαζί μου, που κέρδισε και αξίζει, το σεβασμό και την αγάπη μου.

Ολοκληρώνοντας θέλω να αφιερώσω αυτή την διπλωματική εργασία στη μνήμη του πατέρα μου που με έκανε τον άνθρωπο που είμαι σήμερα.

Σε ευχαριστώ πατέρα, μου λείπεις κάθε λεπτό της ημέρας.

«With my feet upon the ground. I lose myself between the sounds and open wide to suck it in, I feel it move across my skin. I'm reaching up and reaching out. I'm reaching for the random or whatever will bewilder me. Whatever will bewilder me. And following our will and wind we may just go where no one's been. We'll ride the spiral to the end and may just go where no one's been Spiral out, keep going.» (Tool-Lateralus)

Περίληψη

Το αντικείμενο μελέτης, στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας αφορά την αναλυτική παρουσίαση των ακολουθιών Fibonacci, των ιδιοτήτων τους, καθώς και την ανάδειξη του πλήθους εφαρμογών τους, σε διάφορες πτυχές της καθημερινότητας και της επιστήμης. Η εισαγωγή αναφέρεται στην ιστορική πορεία του ομώνυμου Μαθηματικού, θέτοντας ως εναρκτήριο πρόβλημα ανάδειξης των ακολουθιών το πρόβλημα των λαγών. Στην πορεία επεξεργασίας του στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αναδρομικότητα των ακολουθιών Fibonacci, καθώς και ιδιότητες που σχετίζονται με αυτές, παράλληλα με την σύζευξη βασικών ιδιοτήτων της συνδυαστικής, προβάλλοντας εφαρμογές τους στην θεωρία συνόλων, δυαδικών ακολουθιών και μεταθέσεων, όπως επίσης και συνθέσεων – αποσυνθέσεων, ειδικότερα στις παλινδρομήσεις. Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται την διαιρετότητα των ακολουθιών Fibonacci και την αντιστοιχία των ιδιοτήτων τους με διάφορα συμπεράσματα για παίγνια όπως το σκάκι, η οπτική και η βοτανική. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύεται η σύνδεση των ακολουθιών με τη χρυσή τομή, η επίλυση της γραμμικής αναδρομικής σχέσης και της μορφής Binet των ακολουθιών, η προβολή αντιστοίχισης αυτής της θεωρίας με εφαρμογές στην τριγωνομετρία, τα συνεχή κλάσματα και τις πιθανότητες.

Συγκεφαλαιώνοντας, τα εξαγόμενα συμπεράσματα από την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, είναι η προβολή της σπουδαιότητας των εφαρμογών των ακολουθιών Fibonacci, σε ποίκιλες πτυχές επιστήμων και πρακτικών παραδειγμάτων από την καθημερινότητα, ώστε να υπογραμμίζεται πόσο αναπάντεχα επιτακτική είναι η ανάγκη γνώσης των ιδιοτήτων τους. Με την ολοκλήρωση του παρόντος εκπονήματος, ευελπιστώ, να υπάρξει σαφήνεια ως προς τη σπουδαιότητα του ρολού αυτών των ακολουθιών στα διακριτά μαθηματικά και τις επιστήμες.

Λέξεις – Κλειδιά

Μαθηματικά, Fibonacci, Ακολουθίες, Διακριτά, Εφαρμογές, Αρχή απαρίθμησης, Μεταθέσεις, Διατάξεις, Συνδυασμοί, Διωνυμικοί συντελεστές.

«Fibonacci Sequences and applications in combinatorial»

«Nikolaos Gounaris»

Abstract

The subject of study, in the context of this thesis, concerns the detailed presentation of fibonacci sequences, their properties, as well as the highlighting of their multitude of applications in various aspects of everyday life and science. The introduction refers to the historical course of the homonymous Mathematician, posing as the starting problem of highlighting the sequences, the problem of hares. In the course of its elaboration, the first chapter presents the retroactivity of the Fibonacci sequences, as well as properties related to them, along with the coupling of basic properties of combinatorics, projecting their applications in the theory of sets, binary sequences and permutations, as well as compositions - decompositions, especially in palindromes. The second chapter deals with the divisibility of fibonacci sequences and the correspondence of their properties with various conclusions about games such as chess, optics and botany. The last chapter analyzes the connection of the sequences with the golden mean, the solution of the linear recursive relationship and the Binet form of the sequences, the projection of the matching of this theory with applications to trigonometry, continuous fractions, and probability. Summing up, the conclusions drawn from the elaboration of this paper are the promotion of the importance of the applications of the Fibonacci sequences, in various aspects of science and practical examples from everyday life, in order to underline how surprisingly imperative the need to know their properties is. At the end of this thesis, I hope that there will be clarity as to the importance of the role of these sequences in discrete mathematics and sciences.

Keywords

Mathematics, Fibonacci, Sequences, Discretes, Applications, Enumeration Principle, Permutations, Ordinances, Combinations, Binomial coefficients.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα:

ΜΚΔ	Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Εισαγωγή

Ο Φιμπονάτσι ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και σήμερα αναγνωρίζεται ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε τη δεκαετία του 1170 και απεβίωσε το 1240. Εντοπίζεται ένα άγαλμά του στο νεκροταφείο, δίπλα στον καθεδρικό ναό της Πίζας, κοντά στον διάσημο πύργο. Το όνομά του συναντάτε σε δύο δρόμους, την Πίζα και τη Φλωρεντία. Το πραγματικό του όνομα ήταν Λεονάρντο Πιζάνο, αλλά αποκαλούσε τον εαυτό του Φιμπονάτσι, ένα ψευδόνημο που του δόθηκε από τον ιστορικό των μαθηματικών Γκυγιώμ Λίμπρι το 1838 , από τη συντομογραφία που χρησιμοποιούσε Filius Bonacci (γιος του Bonacci).
Ο πατέρας του Λεονάρντο, Γκουλιέλμο Μπονάτσι, ήταν τελωνειακός στην πόλη Μπούγια της Βόρειας Αφρικής. Ο Φιμπονάτσι μεγάλωσε εκεί και η εκπαίδευσή του επηρεάστηκε σε μεγάλο βαθμό από τους Μαυριτανούς, καθώς και από τα μετέπειτα ταξίδια του κατά μήκος των ακτών της Μεσογείου. Ως αποτέλεσμα, γνώρισε πολλούς εμπόρους και έμαθε για τα ψηφιακά συστήματα που χρησιμοποιούν για συναλλαγές και λογαριασμούς, αυτό συνέβει διότι διδάχθηκεσε σχολή λογιστικής και ταξίδεψε με το πατέρα του. Σύντομα ανακάλυψε τα πλεονεκτήματα του «ινδοαραβικού» αριθμητικού συστήματος και ήταν από τους πρώτους που το εισήγαγε στην Ευρώπη. Αυτό είναι το σύστημα αριθμών που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, με δέκα ψηφία, ένα από τα οποία είναι μηδέν και μια υποδιαστολή.(Αθανασίου, 2013)
Ο Λεονάρντο της Πίζας, πιο γνωστός ως Φιμπονάτσι, εισήγαγε την ακολουθία Φιμπονάτσι στη Δυτική Ευρώπη με το βιβλίο του Liber Abbaci, ή στα Ελληνικά *Βιβλίο των Υπολογισμών,* το 1202μ.χ. Ενδιαφέρον είναι να αναφερθεί ότι ο τίτλος του βιβλίου προέκυψε από την εισαγωγή του διότι το μεσαίωνα οι συγγραφείς δεν τιτλοφορούσαν τα βιβλία τους. Η εισαγωγική δήλωση αναφέρει *Εδώ αρχίζει το Βιβλίο του Υπολογισμού το οποίο συνέγραψε ο Λεονάρντο Πιζάνο, της οικογέειας Μπονάτσι, το έτος 1202* (Hic incipit librum calculation, scripsit Leonardus Pizano, de Bonacci familias in anno MCCII).
Σε γραπτά του, ο Λεονάρντο αναφέρει το βιβλίο αυτό ως Liber nurorum (Βιβλίο των αριθμών), ενώ στην επιστολή αφιέρωσης για το βιβλίο Flos (Άνθος) το ονομάζει Liber maior de numero (Μεγάλο βιβλίο των αριθμών), σε άλλο βιβλίο του De piracica geometrie (Περί της πρακτικής της γεωμετρίας). Η λέξη abbaci, της λατινικής λέξης abacus, εμφανίζεται άλλες τρεις φορές στο Liber abbaci. Εάν εξαιρέσουμε τη σύγχυση για τον τίτλο τον βιβλίου, υπάρχει αβεβαιότητα ακόμη και για το αν το όνομα του συγγραφέα

είναι πλήρες ή και σωστό. Σύμφωνα με την παράδοση της εποχής, θα έπρεπε να είναι γνωστός ως Λεονάρντο Πεζάνο δηλαδή ο Λεονάρντο από την Πίζα.

Χώρισε το βιβλίο Liber Abbaci σε δεκαπέντε κεφάλαια που οι τίτλοι τους διέφεραν από χειρόγραφο σε χειρόγραφο, κάτι που μαρτυρούσε ότι οι ανθρώπινοι τυπογράφοι της εποχής, οι αντιγραφείς, ένιωθαν άνεση να κάνουν βελτιώσεις που θεωρούσαν ότι θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να κατανοήσει καλύτερα.

Η ακολουθία είχε ήδη περιγραφεί από Ινδούς μαθηματικούς σε προηγούμενα βιβλία. Στις σύγχρονες συμβάσεις, η ακολουθία ξεκινά με F_0=0. Ωστόσο, στο Liber Abaci, η ακολουθία ξεκινά με F_1=1 και στη συνέχεια παραλείπει το αρχικό μηδέν. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ορισμένοι εξακολουθούν να χρησιμοποιούν αυτήν τη σύμβαση σήμερα.

Στο βιβλίο αυτό, η ιδιαιτερότητα του αφορούσε το γεγονός ότι ήταν το πρώτο δυτικό βιβλίο αριθμητικής για γενική χρήση. Εξηγούσε με απλό τρόπο τις νέες μεθόδους έτσι ώστε ο καθένας να μπορεί να τις κατανοήσει. Είναι ένα εντυπωσιακό βιβλίο, τόσο ως προς το μέγεθός του όσο και για την πολυποίκιλτη θεματολογία του, που συνέβαλε, αφενός, στο να διαχυθούν στον ευρωπαϊκό κόσμο τα ινδο-αραβικά ψηφία και η αριθμητική με τα ψηφία αυτά, και αφετέρου η άλγεβρα ως γενική μέθοδος επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Οι δύο αυτές μαθηματικές πρακτικές, θα αντικαθιστούσαν σε βάθος χρόνου αντίστοιχες πρακτικές και τεχνικές.(DEVLIN, 2018)

Παρόλο όμως που ο Λεονάρντο Πιζάνο άλλαξε τον κόσμο της αριθμητικής και γεφύρωσε την Ανατολή με τη Δύση, γενιές ολόκληρες τον αγνοούσαν. Αυτό πιθανα συνέβει αφενός διότι δεν υπάρχουν πολλές πληροφορίες για τη ζωή του και αφετέρου το σύγγραμμά του το Liber Abaci ήταν για αιώνες χειρόγραφο με περιορισμένη πρόσβαση αφοσιωμένων μελετητών σε αυτό. Η διδασκαλία της αριθμητικής άλλαξε τόσο ριζικά και γρήγορα τον κόσμο όπως η τεχνολογία μέσα στα τελευταία είκοσι έτη σε εμάς. Με αποτέλεσμα ο κόσμος να τα θεωρει όλα δεδομενα εξαιτίας αυτής της ορμής και ήταν ένας ακόμα πιθανός λόγος της μη αναγνωρισιμότητας του Λεονάρντο.

Οι αριθμοί Φιμπονάτσι σχετίζονται με τους αριθμούς Λούκας δεδομένου ότι είναι συμπληρωματικό ζεύγος της ακολουθίας Λούκας, ενώ είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι και με τη χρυσή αναλογία. Το «βιβλίο των υπολογισμών» συνέβαλε καθοριστικά στην εκρηκτική ανάπτυξη του εμπορίου, της επιστήμης και της τεχνολογίας στους αιώνες που ακολούθησαν, επανεκδίδεται το 1228 με συμπληρωματικά στοιχεία και γίνεται ευρέως γνωστό μετά την εφεύρεση της τυπογραφίας το 15^{o} αιώνα. (DEVLIN, 2018)

Το βιβλίο δεν ήταν τυπωμένο μέχρι το 1857, όταν ο Ιταλός βιβλιόφιλος και μεσαιωνικός μαθηματικός βαρόνος Μπαλντάσαρρε Μπονκομπάνι, τύπωσε το χειρόγραφο στη Ρώμη, σχηματίζοντας τον πρώτο από τους δύο τόμους, έντυπης συλλογής όλων των έργων του Λεονάρντο, υπό τον συλλογικό τίτλο Scritti di Leonardo Pisano δηλαδή τα γραπτά του Λεονάρντο Πιζάνο. Ο δεύτερος τόμος , που περιέχει όλα τα άλλα έργα του Λεονάρντο, κυκλοφόρησε το 1862. Ο Αμερικανός μαθηματικός Lawrence Sigler δημοσίευσε μια έντυπη μετάφραση του Liber abbaci στα αγγλικά το 2002. Βασίζεται στην έκδοση του Boncobani και έχει 672 σελίδες, η μοναδική μετάφραση του κειμένου του Λεονάρντο σε σύγχρονη γλώσσα.

Η ακολουθία Φιμπονάτσι εμφανίζεται στα ινδικά μαθηματικά, ειδικότερα σανσκριτικές προσωδίες. Παρόλαυτά η ακολουθία έχει πάρει το όνομα Φιμπονάτσι από τον Λούκας. Έχει αρκετές εφαρμογές σε υπολογιστικούς αλγόριθμους, όπως για παράδειγμα η τεχνική αναζήτησης Φιμπονάτσι. Επιπλέον υπάρχουν γραφικές παραστάσεις οι οποίες ονομάζονται κύβοι Φιμπονάτσι και χρησιμοποιούνται στις παράλληλες διασυνδέσεις και στα κατανεμημένα συστήματα. Οι αριθμοί Φιμπονάτσι εμφανίζονται και στη Βιολογία, ενώ διαπιστώνεται ότι κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων.(Σκαρδανάς, 2019)

Ο χρυσός αριθμός φ, ανιχνεύθηκε για πρώτη φορά από τους αρχαίους Έλληνες, εμφανίστηκε για πρώτη φορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη το 350 π.Χ. περίπου, οι οποίοι παρατήρησαν ότι όλα πάνω στην γη,από τα φυτά μέχρι το ίδιο το ανθρώπινο σώμα,αναπτύσσονται βάσει μίας αναλογίας. Ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος ο οποίος διατύπωσε τον μαθηματικό ορισμό της αναλογίας χρησιμοποιώντας δύο ευθύγραμμα τμήματα. Η ιδέα του ήταν πως αν υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο τομής να το τέμνει ασύμμετρα έτσι ώστε το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος προς όλο το μήκος του τμήματος να είναι ίσο με το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος προς το μήκος του μικρότερου,τότε ο λόγος τους φανερώνει κάποιους είδους αναλογία. Μετά από πάρα πολλά χρόνια ο Fibonacci ανακάλυψε την ακολουθία αριθμών που είχαν την ιδιότητα να εμφανίζουν την χρυσή αναλογία. Ο όρος χρυσή τομή εμφανίζεται το 1835 σε ένα από τα βιβλία του μαθηματικού Μάρτιν Ωμ.

Ο άρρητος $\Phi = ½ (1 + \sqrt{5}) = 1,618033989...$

Ο αριθμός Φ αναφέρεται και ως ο αριθμός της χρυσής τομής, αφού παριστάνει το χωρισμό ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη Χρυσή Τομή, ή Χρυσή αναλογία, ή Αριθμό φ =1.618033989, είναι ένας αριθμός που έχει συναρπάσει τους μαθηματικούς, τους επιστήμονες και τους καλλιτέχνες για αιώνες. Ο αντίστροφος της Χρυσής Τομής 1/φ= 0.618033989, με αποτέλεσμα να ισχύει: 1/φ=φ-1. Ένα ορθογώνιο τετράπλευρο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με 1/φ ονομάζεται Χρυσό Ορθογώνιο. Η ακολουθία Fibonacci παράγεται από τη σχέση f(1) = f(2) = 1 , f(n+1) = f(n) + f(n-1), και απαντάται συχνά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και των άλλων επιστημών. (‘Οι αριθμοί Φιμπονάτσι-το αριθμητικό σύστημα της φύσης’, 2017)

Στα Μαθηματικά, οι Αριθμοί Φιμπονάτσι είναι οι αριθμοί της παρακάτω ακέραιης ακολουθίας:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Εξ ορισμού, οι πρώτοι δύο αριθμοί Φιμπονάτσι είναι το 0 και το 1, και κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Σε μαθηματικούς όρους, η ακολουθία F_n των αριθμών Φιμπονάτσι ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

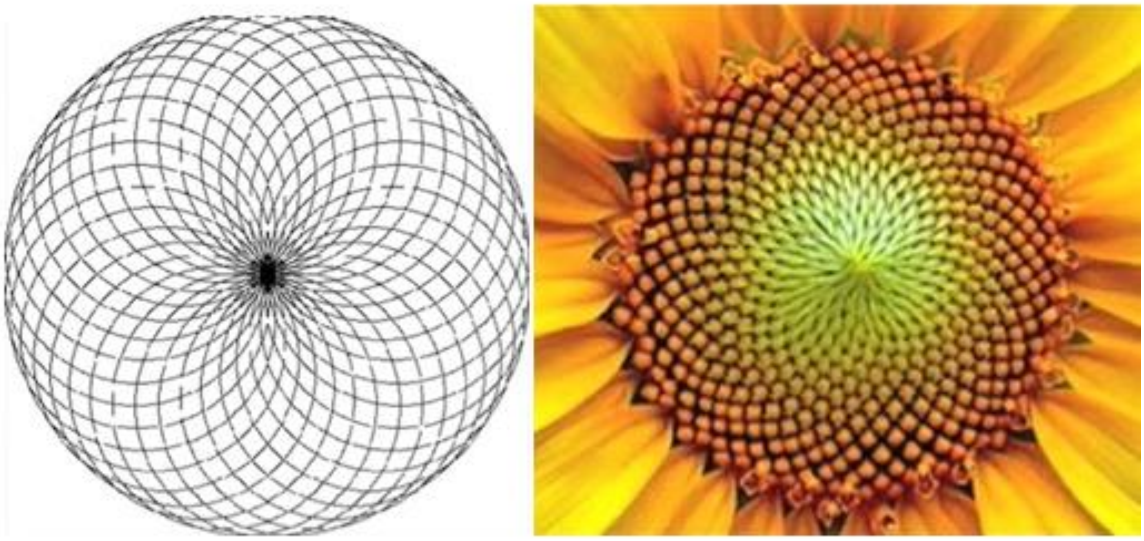
με $F_0 = 0$ και $F_1 = 1$.

Οι αριθμοί Φιμπονάτσι μπορούν να ερμηνευτούν με ποικίλους τρόπους, από τη σκοπιά του υπολογισμού είναι εύκολοι στην κατανόηση. Όσον αφορά τις εφαρμογές η ακολουθία Φιμπονάτσι εμφανίζεται στην Φύση εκπληκτικά συχνά, για παράδειγμα ο αριθμός των πετάλων ενώς λουλουδιού συνήθως είναι μια ακολουθία Φιμπονάτσι, ή ο αριθμός των σπειρών σε ένα ηλιοτρόπιο ή έναν ανανά, τείνει να είναι και αυτός μια ακολουθία Φιμπονάτσι. Στην ακολουθία εμφανίζονται υπέροχα αριθμητικά μοτίβα που οδηγούν στην Χρυσή τομή. Τα φυτά ούτε γνώση έχουν για την ακολουθία Φιμπονάτσι, ούτε γενικότερα για τη γλώσσα των μαθητικών, απλά μεγαλώνουν με τον πιο δόκιμο και επωφελή τρόπο. Όμως η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται επίσης στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδενδρα στους δακτυλίους των κορμών τους. (Μπέντζαμιν, 2013)

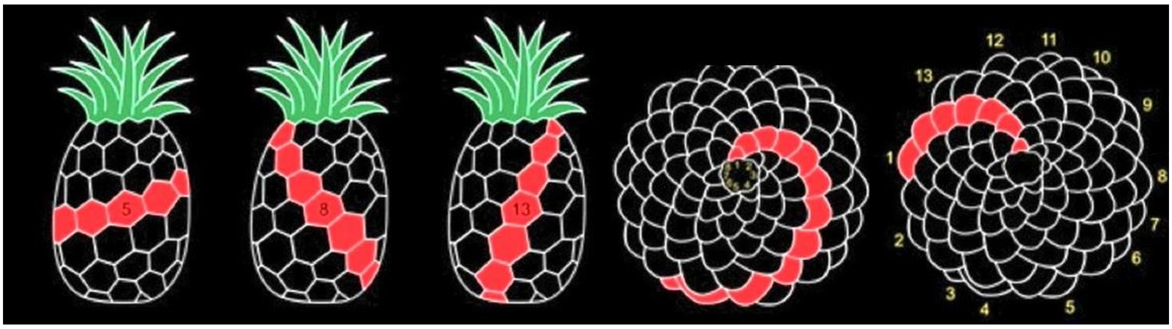
Οι αριθμοί Φιμπονάτσι γραφικά σχηματίζουν σπείρα και εκφράζονται στα φυτά με τον όρο σπειροειδής διάταξη καθώς στα περισσότερα φύλλα ή άνθη ή διακλαδώσεις δένδρων παρατηρείται η μορφή σπείρας. Η ακολουθία Fibonacci επίσης παρατηρείται στις βελόνες αρκετών ειδών έλατου, τα φύλλα της λεύκας, της κερασιάς, της μηλιάς, της δαμασκηνιάς, της βελανιδιάς και της φιλύρας, στη διάταξη των πετάλων της μαργαρίτας και του ηλιοτρόπιου, στην επιφάνεια των κορμών των κωνοφόρων δέντρων και στους δακτυλίους των κορμών των φοινικόδεντρων. (Αθανασιάδης, 1985; Knott, 2016; Livio, 2002; Vogel, 1979)

Η ακολουθία εφαρμόζεται στο σώμα του δελφινιού, στον αστερία, αλλά και στο ανθρώπινο σώμα. Η αναλογία του μήκους του πήχη του χεριού προς το μήκος του χεριού ισούται με 1.618… δηλαδή ισούται με τη Χρυσή Αναλογία. Η αναλογία μεταξύ του μήκους και του φάρδους του προσώπου και η αναλογία του μήκους του στόματος προς το φάρδος της μύτης είναι μερικά ακόμα παραδείγματα της εφαρμογής των αριθμών αυτών στο ανθρώπινο σώμα.

Εικόνα 1 Σπείρα Fibonacci σε κίτρινο χαμομήλι



Εικόνα 2 Fibonacci Ακολουθίες στη Φύση



Εικόνα 3 Fibonacci Ακολουθίες στον Ανανά

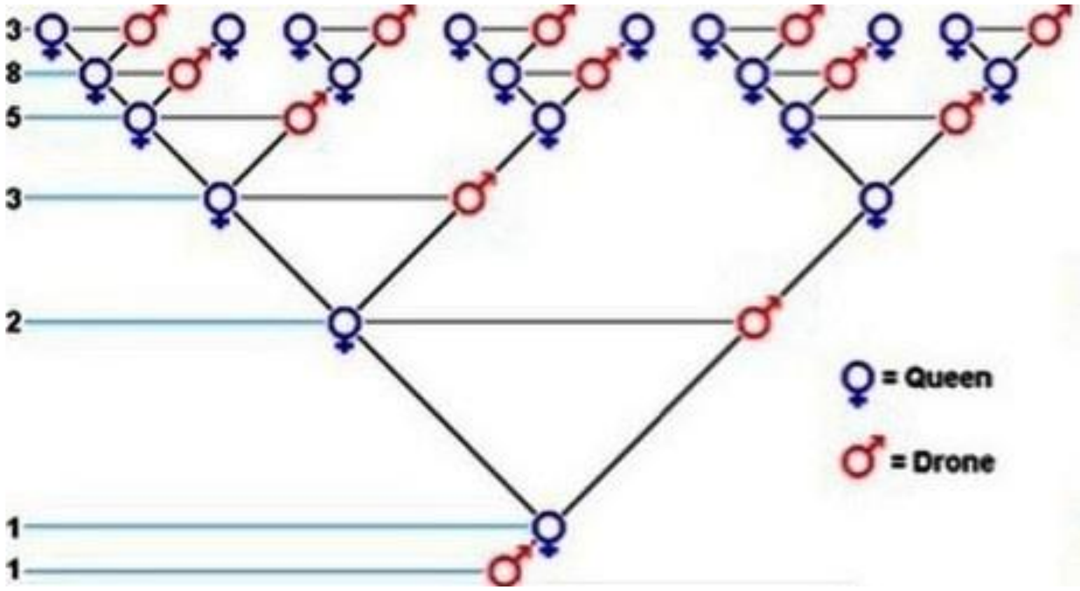
Το πρόβλημα των λαγών

Ένα παράδειγμα που εισήχθει από τον Λεονάρντο είναι το πρόβλημα των λαγών. Το πρόβλημα αυτό είναι από τις πιο ευφάνταστες προκλήσεις που είχε ο Λεονάρντο συμπεριλάβει στο βιβλίο του Liber abbaci για να σπάσει την μονοτονία των πρακτικών προβλημάτων που βρίσκονται σε υπερβολικό βαθμό στο βιβλίο. Δεν ήταν παρά μια διασκεδαστική σπαζοκεφαλιά, όμως η ακολουθία των αριθμών που συνιστούν τη λύση της αποτελεί πνευματική κληρονομιά. Προς το τέλος τον Κεφαλαίου 12 του Liber abbaci, στριμωγμένο ανάμεσα σε προβλήματα για τον καταμερισμό τροφίμων και χρημάτων, ο Λεονάρντο τοποθέτησε ένα ευφάνταστο πρόβλημα για έναν αυξανόμενο πληθυσμό κουνελιών. Το πρόβλημα δεν ήταν δική τον επινόηση, αναφέρεται ήδη από ινδούς μαθηματικούς των πρώτων μεταχριστιανικών αιώνων, εκείνους που ανέπτυξαν το αριθμητικό σύστημα που περιγράφεται στο Liber abbaci. Το πρόβλημα προσφέρει άριστο πεδίο εξάσκησης στη χρήση του αριθμητικού συστήματος.'Οσο κι αν για τις νεότερες γενιές ιστορικών.

Η εκφώνηση του προβλήματος ήταν ως εξής *Ένας άνδρας είχε ένα ζευγάρι κουνέλια σε ένα κλειστό μέρος και θέλουμε να ξέρουμε πόσα δημιουργούνται από το ζευγάρι αυτό μέσα σε έναν χρόνο όταν η Φύση τους είναι τέτοια ώστε κάθε μήνα να γεννούν άλλο ένα ζευγάρι και αυτά που γεννήθηκαν να γεννούν από το δεύτερο μήνα*. Ο Λεονάρντο παρέθεσε και τον πληθυσμό των κουνελιών στο τέλος κάθε μήνα. Στην αρχή ήταν ένα, στο πρώτο μήνα δύο, στο δεύτερο τρία, στο τρίτο πέντε,στο τέταρτο οκτώ, στο πέμπτο δεκατρία,στον έκτο εικοσιέννα, στον έβδομο τριαντατέσσερα, στον όγδοο πενηνταπέντε, στον ένατο ογδόνταεννέα, στο δέκατο εκατοσαράναττέσσερα, στον ενδέκατο διακόσια τριάντα τρια και στο δωδέκατο τριακόσια εβδομήντα επτά . (DEVLIN, 2018)

Έστω για παράδειγμα λοιπόν, ότι κάποιος έχει ένα ζευγάρι λαγών , ένα από κάθε φύλλο και έστω ότι αναπαράγονται. Μας ενδιαφέρει ο αριθμός ζευγαριών μέσα σε ένα χρόνο αναπαραγωγής κάθε ώριμου ζευγαριού αρσενικού και θηλυκού μετά από τον πρώτο μήνα, αναπαραγόμενα από τον δεύτερο και έπειτα σε καθένα από τους επόμενους μήνα. Στο τέλος κάθε μήνα γεννιέται ένα νέο ζεύγος λαγών και θεωρούμε ότι στην διάρκεια του έτους δεν πεθαίνει κανένα από αυτά καθώς και ότι στο τέλος κάθε μήνα αναπτύσσονται πλήρως .Στην διάρκεια ανάπτυξης τους το πλήθος των λαγών σε κάθε μήνα ισούται με την προηγούμενο πλήθος συν τα προηγούμενα νεογέννητα. Επίσης, δεδομένου ότι κάθε ώριμο ζεύγος παράγει ένα νεογέννητο ζεύγος στο τέλος αυτού του μήνα, η καταχώριση νεογέννητου για κάθε δεδομένο μήνα ισούται με την ώριμη καταχώριση για τον προηγούμενο μήνα. Ο πληθυσμός των κουνελιών κάθε μήνα περιγράφεται από την αριθμητική ακολουθία 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … κάθε όρος της οποίας προκύπτει από το άθροισμα των δύο αμέσως προηγούμενων όρων (με εξαίρεση τους δύο πρώτους όρους οι οποίοι δίνονται εξ αρχής). Έτσι βάσει αυτών των δεδομένων προκύπτει η ακολουθία αριθμών 1 , 1, 2 ,3 , 5 , 8 , 13, … και ούτω καθεξής η οποία αποτελεί την ακολουθία την ακολουθία αριθμών Fibonacci η οποία ονομάστηκε από τον Francois Edouard Anatole Lucas και έτσι έγινε γνωστή στην δύση.(Grimaldi, 2012)

Δηλαδή



Εικόνα 4 Το πρόβλημα των λαγών

Παλαιότερα το πρόβλημα το συναντούσαμε στα σχολικά βιβλία με την εξής εκφώνηση «Ένας άνδρας είχε ένα ζευγάρι κουνέλια σε ένα κλειστό σύστημα και θέλουμε να ξέρουμε πόσα δημιουργούνται από το ζευγάρι αυτό μέσα σε έναν χρόνο με την προϋπόθεση ότι η φύση τους είναι τέτοια ώστε κάθε μήνα να γεννούν άλλο ένα ζευγάρι και αυτά που γεννήθηκαν να γίνονται παραγωγικά από τον δεύτερο μήνα και μετά». Έχει μεγάλο ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι ο ίδιος ο Φιμπονάτσι ουδέποτε μελέτησε την ακολουθία και τις ιδιότητες που έχουν οι αριθμοί που την απαρτίζουν.(DEVLIN, 2018)

Το πρόβλημα των κουνελιών περιέχεται στο Liber abbaci , το πιο γνωστό από τα πέντε έργα που έγραψε ο Φιμπονάτσι και σώζονται ως τις μέρες μας. Τα υπόλοιπα, τέσσερα σε αριθμό, είναι τα εξής: De practica geometrie (Περί πρακτικής γεωμετρίας), Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam pertinentium (Απάνθισμα λύσεων διαφόρων προβλημάτων σχετικών με τον αριθμό και τη γεωμετρία, αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία συνοπτικά ως Flos), Liber quadratorum (Βιβλίο των τετραγώνων), Epistola ad Magistrum Theodorum (Επιστολή στον Δάσκαλο Θεόδωρο).

Στο κεφάλαιο ένδεκα του βιβλίου Liber abbaci , προ το τέλος, αναφέρετε ένα αξιοπερίεργο πρόβλημα που αργότερα θα γίνει γνωστό στους κύκλους των μαθηματικών ως το πρόβλημα των πτηνών του Φιμπονάτσι. Η εκφώνηση του προβλήματος ήταν ως εξής *Ένας άνδρας αγοράζει τριάντα πτηνά, που είναι πέρδικες, περιστέρια και σπουργίτια, προς τριάντα δηνάρια. Την πέρδικα την αγοράζει προς τρια δηνάρια, το περιστέρι προς δύο δηνάρια, ενώ αγοράζει από δύο σπουργίτια προς ένα δηνάριο, δηλαδή ένα σπουργίτι προς μισό δηνάριο ($^1/_2$). Το ζητούμενο είναι πόσα πτηνά αγοράζει από το κάθε είδος*. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον αυτού του προβλήματος αφορά το ότι φαινομενικά δεν μας δίνει αρκετές πληροφορίες για να οδηγηθούμε στη λύση του. Αν υποθέσουμε ότι οι πέρδικες είναι x σε αριθμό , τα περιστέρια y και τα σπουργίτια z, τότε οδηγούμαστε σε δύο εξισώσεις ενώ κανονικά χρειάζονται τρεις για να βρεθούν οι αντίστοιχοι άγνωστοι. Η λύση επιτρέπεται με δύο όμως εξισώσεις αφού η πληροφορία που μας δίνεται είναι ότι οι τιμές των τριών αγνώστων πρέπει να είναι όλες θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Σύμφωνα με το πρόβλημα ο άνδρας αγοράζει τρια είδη πτηνών, οπότε κανείς από τους αγνώστους δεν μπορεί να ισούται με μηδέν και προφανώς δεν αγοράζει κλάσματα πτηνών.

Ο Φιμπονάτσι προσπάθησε να καλύψει τα πρώτα βήματα της άλγεβρας και των εφαρμοσμένων μαθηματικών με μεθόδους είτε δικές του είτε δανεισμένες από διάφορες πηγές. Εξήγησε τα πάντα με παραδείγματα που είχε επεξεργαστεί, τα οποία ήταν ειδικά σχεδιασμένα να εξασκήσουν τον όποιο αναγνώστη στη χρήση των νέων μεθόδων που πρότεινε.

Η αναγνώριση

Το 1241, η κοινότητα της Πίζας αποφάσισε ότι ο Λεονάρντο έπρεπε να λαμβάνει ετήσια πληρωμή σε αντάλλαγμα για τις υπηρεσίες του στην πόλη, κάτι που οριστικοποίησε με διάταγμα. (Η διακήρυξη είναι η μόνη απόδειξη που γνωρίζουμε για τον Λεονάρντο ότι υπήρξε ζωντανός το 1241.) Το κείμενο της διακήρυξης είναι εγγεγραμμένο σε μια πέτρινη πλάκα που χτίστηκε από την πόλη στις 16 Ιουνίου 1867, προς τιμή του και βρίσκεται στην είσοδο των Εθνικών Αρχείων της Πίζας.

Το 1963, εξαιτίας της μανίας του επιστημονικού κόσμου με τις ακολουθίες και τους αριθμούς Φιμπονάτσι, ιδρύθηκε η Fibonacci Association, Σύνδεσμος Φιμπονάτσι, που ακόμα και σήμερα εκδίδει κάθε τρεις μήνες το μαθηματικό περιοδικό Fibonacci Quarterly. Αναλυτικότερα η Ένωση Fibonacci είναι ένας μαθηματικός οργανισμός που ειδικεύεται στην ακολουθία αριθμών Fibonacci και σε μια μεγάλη ποικιλία σχετικών θεμάτων, γενικεύσεων και εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων των σχέσεων επανάληψης, των συνδυαστικών ταυτοτήτων, των διωνυμικών συντελεστών, των πρώτων αριθμών, των ψευδοπριμμάτων, των συνεχών κλασμάτων, της χρυσής αναλογίας, της γραμμικής άλγεβρας, της γεωμετρίας, της πραγματικής ανάλυσης και της μιγαδικής ανάλυσης.
Και τα δύο ,δηλαδή και ο Σύνδεσμος και το μαθηματικό περιοδικό, είναι αφιερωμένα στη μαθηματική έρευνα πάνω στους αριθμούς Φιμπονάτσι και σε όσες σειρές αριθμών παρόμοιων με αυτούς. Αυτές οι σειρές αριθμων δεν ανήκουν στα βαριά μαθηματικά, αλλά αποδεικύεται ότι έχουν πολλές μαθηματικές ιδιότητες αφού είναι αριθμητικές ακολουθίες που δημιουργούνται με μεθόδους παρόμοιες της αρχικής ακολουθίας Φιμπονάτσι. (DEVLIN, 2018)
Η Fibonacci Association πλέον δραστηριοποιείται σε όλο το διαδίκτυο και κατέχει δική της ιστοδελίδα και σελίδα στο Facebook, καθώς και σε άλλα social media. Δημοσιεύει επίσης πρακτικά για τα διεθνή της συνέδρια, που πραγματοποιούνται κάθε δύο χρόνια από το 1984. Το συνέδριο του 2008, με επίσημο τίτλο *Δέκατο τρίτο διεθνές συνέδριο για τους αριθμούς Fibonacci και τις εφαρμογές τους*, πραγματοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Πατρών (Ελλάδα), ενώ προηγήθηκαν συνέδρια στο Κρατικό Πανεπιστήμιο του Σαν Φρανσίσκο (ΗΠΑ, 2006), στο Technische Universität Braunschweig (Γερμανία, 2004), στο Πανεπιστήμιο της Βόρειας Αριζόνα (ΗΠΑ, 2002) και στο Supérieur de Technologie (Λουξεμβούργο, 2000). Το Συνέδριο του 2010 πραγματοποιήθηκε στο Instituto de Matemáticas de la UNAM, Morelia, Μεξικό, όπως ανακοινώθηκε στην ιστοσελίδα της Ένωσης Fibonacci. Το Συνέδριο του 2012 θα πραγματοποιηθεί στις 25-30 Ιουνίου στο Ινστιτούτο Μαθηματικών και Πληροφορικής, Eszerházy Károly College, Eger, Ουγγαρία, με κεντρικό ομιλητή τον Neil Sloane, ιδρυτή της Εγκυκλοπαίδειας Ακεραίων Ακολουθιών. (*The Fibonacci Association Official Website*, 2022)

1. Κεφάλαιο Πρώτο

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η αναδρομικότητα των ακολουθιών Fibonacci, καθώς και ιδιότητες που σχετίζονται με τις ακολουθίες. Σε αντιστοιχία με την σύζευξη βασικών ιδιοτήτων της συνδυαστικής, θα προβληθούν οι εφαρμογές τους στην θεωρία σύνολων, δυαδικών ακολουθιών και μεταθέσεων, όπως επίσης και συνθέσεων – αποσυνθέσεων και ειδικότερα στις παλινδρομίσεις.

1.1 *Αναδρομικός Ορισμός των ακολουθιών Fibonacci*

Εξετάζοντας την ακουλαθία των αριθμών Fibonacci 1 ,1 ,2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,21 ,34 ,55 παρατηρούμε ότι 1 = 1 + 0 , 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, ···, 55 = 34 + 21 . Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να ορίσουμε την αναδρομική ακολουθία ως εξής· $n \geq 0$ και F_n οι αριθμοί Fibonacci τότε:

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Αυτός είναι ο κανονικός αριθμός της Αναδρομικότητας, την οποία είχε υπόψη του ο Fibonacci. Ωστόσο ο ορισμός είχε γνωστοποιηθεί πρώτερα από τον Άλμπερτ Γκίραρντ (Albert Girard).

1.2 *Ιδιότητες των ακολουθιών Fibonacci*

Μερικές αξιοσημείωτες ιδιότητες των αριθμών αυτών παρατίθεται παρακάτω.

1.2.1 Ιδιότητες

1.2.1.1 Ιδιότητα Πρώτη

Για $n \geq 0$, ΜΚΔ $(F_n , F_{n+1}) = 1$

Απόδειξη Πρώτης Ιδιότητας:

Ισχύει ΜΚΔ (F_0 , F_1) = ΜΚΔ $(0, 1) = 1$

Επαγωγικά , έστω ότι για $n = k > 0$ ισχύει ΜΚΔ $(F_k , F_{k+1}) > 1$

Όμως ΜΚΔ $(F_{k-1}, F_k) = 1$ (4)

Άρα υπάρχει ακέραιος r με $r > 1$, ώστε $r \mid F_k$ (1) , $r \mid F_{k+1}$ (2) .

Όμως $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

=> $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ 3

Από τις σχέσεις (1) , (2) , (3), => $r \mid F_{k-1}$ όμως από (4) οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Συμπεραίνουμε ότι ΜΚΔ $(F_n , F_{n+1}) = 1$ για $n \geq 0$

Ομοίως ΜΚΔ $(F_n , F_{n+2}) = 1$

Αυτό προκύπτει από τον προηγούμενο συλλογισμό και τη παρατήρηση ότι :

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = F_n + F_n + F_{n-1} = 2 F_n + F_{n-1}$

=> $F_{n+2} - F_n = F_n + F_{n-1}$

Και το γεγονός ότι ΜΚΔ $(F_n , F_{n-1}) = 1$

1.2.1.2 Ιδιότητα Δεύτερη

Το άθρισμα οποιοδήποτε έξι συνεχόμενων αριθμών Fibonacci διαιρείται με το 4.

Δηλαδή για $n \geq 0$ με σταθερό n ισχύει η εξής σχέση:

$$\sum_{k=0}^{5} F_{n+k} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}$$

$$= 4 F_{n+4}$$

Απόδειξη Δεύτερης Ιδιότητας:

Για $n \geq 0$ ισχύει:

$= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}$

$= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} +(F_{n+3} + F_{n+4})$

$= (F_{n+2}+ F_{n+2})+(F_{n+3}+ F_{n+3})+(F_{n+4}+ F_{n+4})$

$= 2 F_{n+2} + 2 F_{n+3} + 2 F_{n+4}$

$= 2 (F_{n+2}+ F_{n+3}) + 2 F_{n+4}$

$= 2 F_{n+4}+ 2 F_{n+4}$

$= 4 F_{n+4}$

Πρακτικά λοιπόν έχουμε επαλήθευση ότι :

$F_0 + F_1 + F_2+ F_3 + F_4 + F_5 = 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = 4 \text{ x } 3$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = 4 \times 5$

$F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 32 = 4 \times 8$

$\vdots$

Κατά τον ίδιο τρόπο

$$\sum_{k=0}^{9} F_{n+k} = 11\, F_{n+6}$$

Απόδειξη σχέσης:

$$\sum_{k=0}^{9} F_{n+k} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9}$$

$$= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + (F_{n+5} + F_{n+6}) + (F_{n+6} + F_{n+7}) + (F_{n+7} + F_{n+8})$$

$$= F_{n+2} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + 2\, F_{n+5} + 3\, F_{n+6} + 2\, F_{n+7} + F_{n+8}$$

$$= 2\, F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + 2\, F_{n+5} + 3\, F_{n+6} + 2(F_{n+5} + F_{n+6}) + F_{n+6} + F_{n+7}$$

$$= 2\, F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + 2\, F_{n+5} + 3\, F_{n+6} + 2\, F_{n+5} + 2\, F_{n+6} + F_{n+6} + F_{n+5} + F_{n+6}$$

$$= 2\, F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + 5\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 2\, F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4}) + 4\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 2\, F_{n+2} + 2\, F_{n+3} + 2\, F_{n+4} + 4\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 2\, [(F_{n+2} + F_{n+3}) + F_{n+4}] + 4\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 2\, (F_{n+4} + F_{n+4}) + 4\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 4\, F_{n+4} + 4\, F_{n+5} + 7\, F_{n+6}$$

$$= 4\, (F_{n+4} + F_{n+5}) + 7\, F_{n+6}$$

$$= 4\, F_{n+6} + 7\, F_{n+6}$$

$= 11\ F_{n+6}$

1.2.1.3 Ιδιότητα Τρίτη

Για κάθε Φυσικό n≥0,

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

Για k = 0, $F_0 = F_{+2} - 1 = 1 – 1 = 0$ ισχύει.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, έστω ότι ισχύει για k = r , δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{r} F_k = F_{r+2} - 1 \qquad (5)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για k = r + 1

Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{r+1} F_k = \sum_{k=0}^{r} F_k + F_{r+1}$$

$= F_{r+2} - 1 + F_{r+1}$

$= (F_{r+1} + F_{r+2}) - 1$

$= F_{r+3} - 1$

Όμως οι δείκτες στο άθροισμα είναι r + 2 οπότε από την αρχική ισχύουσα πρόταση (5), ο αριθμός Fibonacci πρέπει να έχει δείκτη (r + 2) + 1 . Έτσι επαγωγικά παραπάνω αποδεικνύεται η ιδιότητα.

1.2.1.4 Ιδιότητα Τέταρτη

Για κάθε Φυσικό n≥1,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2k}$$

Για k = 1, $F_1 = F_2 = 1$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $k \leq r$, θα αποδειχθεί ότι ισχύει για $k = r + 1$, δηλαδή:

$$\sum_{k=1}^{r+1} F_{2k-1} = F_{2(r+1)}$$

Όμως

$$\sum_{k=1}^{r+1} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{r} F_{2k-1} + F_{2(r+1)-1} =$$

$$= (F_2r + F_2r_{+1})$$

$$= F_2r_{+2}$$

$$= F_{2(r+1)}$$

Από χρήση μαθηματικής επαγωγής προκύπτει το συμπέρασμα .

1.2.1.5 Ιδιότητα Πέμτη

Για κάθε Φυσικό n≥1,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{n+2} - 1 \ .$$

Πάλι με χρήση μαθηματικής επαγωγής θα αποδειχθεί η παραπάνω σχέση.

Για k = 1 , $F_2 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$

Παρακάτω θα αποδειχθεί ότι ισχύει για k = r + 1 , υποθέτοντας ότι ισχύει για k ≤ r , δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{r+1} F_{2k} = F_{2(r+1)+1} - 1$$

Όμως

$$\sum_{k=1}^{r+1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{r} F_{2k} + F_{2(r+1)} =$$

$$= F_{2r+1} - 1 + F_{2(r+1)}$$

$$= F_{2r+1} + F_{2r+2} - 1$$

$$= F_{2r+3} - 1$$

$$= F_{2r+2+1} - 1$$

$$= F_{2(r+1)+1} - 1$$

Από χρήση μαθηματικής επαγωγής προκύπτει το συμπέρασμα .

1.2.1.6 Ιδιότητα Έκτη

Για κάθε Φυσικό n≥1, ισχύει

$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Απόδειξη:

$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2$

Άρα

$$\left\{\begin{array}{l} F_1^2 = F_1 F_2 \\ F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2 \\ F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3 \\ \vdots \\ F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{Προσθέτοντας κατά μέλη}$$

$\Rightarrow \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2$

$= F_1 F_2 + F_2 F_3 - F_1 F_2 + F_3 F_4 - F_2 F_3 + \cdots - \cdots + F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$

$= F_n F_{n+1}$

$\Rightarrow F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

1.2.1.7 Ιδιότητα Έβδομη

Για φυσικούς αριθμού m, n ισχύει

$F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m+1}$

Απόδειξη:

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς m σταθεροποιώντας οποιοδήποτε n .

Για m = 0 , $F_n = F_n$ ισχύει.

Υποθέτοντας ότι ισχύει για όλα τα m, με m ≤ k + 1.

Δηλαδή

$F_{n+k} = F_{n+1} F_k + F_n F_{k+1}$

Και

$F_{n+k+1} = F_{n-1} F_{k+1} + F_n F_{k+2}$

Άρα

$$F_{n+k} + F_{n+k+1} = F_{n-1} F_k + F_n F_{k+1} + F_{n-1} F_{k+1} + F_n F_{k+2}$$

=> $F_{n+k+2} = F_{n-1} (F_k + F_{k+1}) + F_n (F_{k+1} + F_{k+2})$

=> $F_{n+k+2} = F_{n-1} F_{k+2} + F_n F_{k+3}$

Επομένως ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό m .

1.2.1.8 Ιδιότητα Όγδοη (Τύπος του Cassini)

Ακολουθεί ο Τύπος του Cassini

$$\boxed{F_{n+1}{}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n}$$

Αξιοποιώντας την μαθηματική επαγωγή έχουμε :

Για n = 0 $\quad F_1{}^2 = F_0F_2 + 1$

$\Rightarrow\ 1^2 = 1$

$\Rightarrow\ 1 = 1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για κάποιο φυσικό k ,

$$F_{k+1}{}^2 = F_k F_{k+2} + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+1}{}^2 + F_{k+1} F_{k+2} = F_k F_{k+2} + F_{k+1} F_{k+2} + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+1} F_{k+1} + F_{k+1} F_{k+2} = F_k F_{k+2} + F_{k+1} F_{k+2} + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+1} (F_{k+1} + F_{k+2}) = F_{k+2} (F_k + F_{k+1}) + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+1} F_{k+3} = F_{k+2} F_{k+2} + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+1} F_{k+3} = F_{k+2}{}^2 + (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+2}{}^2 = F_{k+1} F_{k+3} - (-1)^k$$

$$\Rightarrow\ F_{k+2}{}^2 = F_{k+1} F_{k+3} + (-1)^{k+1}$$

Επομένως ο τύπος ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n .

1.2.2 Σε αντιστοιχία με την σύζευξη βασικών ιδιοτήτων της συνδυαστικής

Ξεκινώντας ας θεωρήσουμε το σύμβολο $S_4 = \{1,2,3,4\}$. Έστω $A = \{2,4\}$ με $A \subseteq S_4$ ώστε κάθε ένα από τα στοιχεία του να είναι μεγαλύτερο ή ίσο ($\geq$) του πληθάριθμου του A. Δηλαδή $2 \geq |A|$, $4 \geq |A|$.

Αποκαλούμε ένα τέτοιο υποσύνολο A ως παχύ υποσύνολο του S_4, αν $x \geq |A|$ για κάθε $x \in A$.

Έστω F_n ο αριθμός των παχύ υποσυνόλων του S_n τότε $F_1 = 2$ για $\emptyset$ και $\{1\}$ υποσύνολα του $S_1 = \{1\}$ και $F_2 = 3$ για τα $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ του $S_2 = \{1,2\}$.

Για $n \geq 3$, αν A παχύ υποσύνολο του S_n και $n \notin A$, τότε το A είναι παχύ υποσυνόλων του S_{n-1} .

Αν $n \in A$ τότε $1 \notin A$ γιατί για $1, n \in A$ τότε $2 \leq |A|$ και $|A| \nleq 1$.

Μετακινώντας το n και αποσπώντας το 1 από τους υπόλλοιπους ακεραίους του A, παίρνουμε το σύνολο S_{n-2} .

Άρα

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$

Συνεπώς $F_n = F_{n+2}$, $n \geq 1$

Σε αυτό το σημείο ας παρατηρήσουμε πως μπορούμε να επιλέξουμε το πλήθος των παχύ υποσυνόλων , έστω για παράδειγμα του S_4, με διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας συνδυασμούς. Υπάρχει 1 τρόπος να επιλέξουμε το $\emptyset$ σύνολο μεγέθους 1, άρα $\binom{4}{1}$ και $\binom{3}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε ένα παχύ υποσύνολο μεγέθους 2 από το $\{2,3,4\}$.

Συνεπώς για n = 4 έχουμε

$F_6 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$, δηλαδή άθροισμα διωνυμικών συντελεστών .

Για n = 5 , $S_5 = \{1,2,3,4,5\}$ οπότε ο αριθμός των παχύ υποσυνόλων είναι

$F_7 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1}$

Συνεπακολουθιακά **(1)** $F_m = \begin{cases} \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, \text{ n περιττός} \\ \\ \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}, \text{ n άρτιος} \end{cases}$

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να συνδυάσουμε τους διωνυμικούς συντελεστές με τους αριθμούς Fibonacci όπως στο τριγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Προκύπτει το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα

$\binom{0}{0} = 1 = F1$

$\binom{1}{0} = 1 = F2$

$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = F3$

$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 = F4$

$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5 = F5$

$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8 = F6$

$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F7$

$\vdots$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται και ισχυροποιείται η απόδειξή της με χρήση μαθηματικής επαγωγής και της ταυτότητας.

(2) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$ για $n \geq r \geq 1$

Για παράδειγμα

$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} =$

$=1 + 5 + 6 + 1$

$=13$

$=8 + 5$

$= (1+4+3) + (1+3+1)$

$= \left[\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \right] + \left[\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \right]$

$= \binom{5}{0} + \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{1} \right] + \left[\binom{3}{2} + \binom{3}{1} \right] + \binom{2}{2}$

Παραπάνω έγινε χρήση της (2) αφού

$\binom{6}{0} = \binom{5}{0}$, $\binom{5}{1} = \binom{4}{1} + \binom{4}{0}$, $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$ και $\binom{3}{3} = \binom{2}{2}$

Η σχέση (1) σε μια παραλλαγή μπορεί να διατυπωθεί και να αποδειχθεί πιο τεχνικά κάντοτας χρήση τη σχέση (2) ως εξής:

<u>Πρόταση:</u>

Για κάθε $m \geq 0$ ισχύει:

$$F_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \binom{m-i}{i}$$ όπου $\binom{u}{v} = 0$, όταν $u < v$.

Ακολουθεί η απόδειξη :

Ας ονομάσουμε

$$A_{m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m-i}{i}$$

Για m = 0 έχουμε $A_1 = 1$ και για m = 1 $A_2 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1$

Τώρα για κάθε $m \geq 0$ ισχύει :

$$A_{m+3} = \sum_{i=0}^{m+2} \binom{m-i}{i} \overset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{m+2} \left(\binom{m-i}{i} + \binom{m-i}{i} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1-i}{i} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m-j}{j}$$

$$= A_{m+2} + A_{m+1}$$

Συνεπώς για κάθε $m \geq 0$ έχουμε $F_{m+1} = A_{m+1}$ (Αντωνιάδης & Κοντογεώργης`, 2015)

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης των αριθμών Fibonacci μέσω διατάξεων και συνδυασμών.

Έστω $Q_ν$ ο αριθμός των διατάξεων δυο στοιχείων 0 και 1 ανά ν με επανάληψη που δεν περιλαμβάνει ούτε δύο μηδενικά συνεχόμενα . Αν $Q_{ν,κ}$ είναι ο αριθμός διατάξεων των 0 και 1 ανά ν με επανάληψη που περιλαμβάνουν και μηδενικά, χωρίς να περιλαμβάνουν ούτε δύο μηδενικά συνεχόμενα. Τότε $Q_{ν,κ}$ είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων επιλογής των κ θέσεων για τα μηδενικά από τις (ν – κ -1) +2 = ν – κ +1 θέσεις μεταξύ των ν – κ μονάδων και πρίν από τη πρώτη και μετά τη τελευταία μονάδα.

Δηλαδή:

$Q_{\nu,\kappa} = \binom{\nu-\kappa+1}{\kappa}$, $\kappa = 0,1,2,\cdots , \left[\frac{(\nu+2)}{2}\right]$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του αθροίσματος έπεται ότι

$$Q_\nu = \sum_{\kappa=0}^{\left[\frac{(\nu+2)}{2}\right]} \binom{\nu-\kappa+1}{\kappa} \quad , \nu = 0,1,2,\cdots$$

Ενώ με τη χρησιμοποίηση του τριγώνου του Pascal δηλαδή της αναγωγικής σχέσης (2) συμπεραίνουμε ότι

$Q_\nu = Q_{\nu-1} + Q_{\nu-2}$, $\nu = 2, 3, \cdots$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2$

ή

$F_{\nu+1} = F_\nu + F_{\nu-1}$, $F_0 = 1$, $\nu = 1,2, \cdots$

Εάν τώρα $C_s(\nu, \kappa)$ ο αριθμός των συνδυασμών των ν πρώτων φυσικών αριθμών ανά κ ώστε μεταξύ δύο οποιονδήποτε στοιχείων ενός συνδυασμού υπάρχει τουλάχιστον s στοιχεία από τα ν που δεν ανοίκουν σε αυτόν, τότε ο υπολογισμός του $C_s(\nu, \kappa)$ ανάγεται στον υπολογισμό των ακεραίων λύσεων της γραμμικής εξίσωσης $j_1 + j_2 + \cdots + j_k + j_{k+1} = \nu$ με τους περιορισμούς $j_1 \geq 1$, $j_2 \geq s+1$, $j_3 \geq s+1$, $\cdots$, $j_k \geq s+1$, $j_{k+1} \geq 0$

Εν προκειμένω για να έχουμε αποτέλεσμα με τους αριθμούς Fibonacci μας ενδιαφέρει s = 1 . Επειδή

$$1+\underbrace{2 + 2+ \cdots + 2}_{\kappa-1}+ 0 = 1 + 2(\kappa-1) +0 \qquad \boxed{2\kappa-1 \leq \nu} \qquad = (7)$$

<u>Ισχυρισμός</u>: $C_1(\nu,\kappa) = \binom{\nu-\kappa+1}{\kappa}$

Η απόδειξη θα σκιαγραφηθεί σε δύο φάσεις.
Αρχικά θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu = \kappa$ (3) με κ ακέραιο, έχει πλήθος λύσεων $(r_1, r_2, \cdots, r_\nu)$, $\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$ των συνδυασμών ν ανά κ με επανάληψη.

Σε κάθε μη αρνητική ακέραια λύση $(r_1, r_2, \cdots, r_\nu)$ της (3) αντιστοιχεί μια εκχώρηση των κ μονάδων του δεξιού μέλους στους ν διακεκριμένους προσθεταίους του αριστερού μέλους αυτής, η οποία δίνει $r_i \geq 0$ μονάδες στον i προσθεταίο $i = 1,2,\cdots,\nu$.
Σημειώνοντας την εκχώρηση αυτή με καταχώρηση $r_i \geq 0$ φορές του δείκτη (όπου η σειρά καταχώρησης δεν παίζει ρόλο) και επειδή $r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = \kappa$, έχουμε γι αυτήν τον συμβολισμό $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\kappa\}$όπου r_1 στοιχεία είναι ίσα με 1 , r_2 στοιχεία ίσα με $2,\cdots$, r_ν στοιχεία ίσα με ν .
Επομένως σε κάθε μη αρνητική ακέραια λύση $(r_1, r_2, \cdots, r_\nu)$ της (3) αντιστοιχεί τελικά ένας συνδυασμός $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\kappa\}$των ν δεικτών $\{1,2,\cdots,\nu\}$ ανά κ με επενάληψη, στον οποίο το στοιχείο (δείκτης) i εμφανίζεται $r_1 \geq 0$ φορές με $i = 1,2,\cdots,\nu$. Η αντιστοιχεία αυτή είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη και έτσι ο αριθμός των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της (3) είναι ίσος με $\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$ των συνδυασμών ν ανά κ με επανάληψη.
Εάν έχουμε περιορισμούς της (3) δηλαδή $\boxed{x_i \geq s_i,\ i=1,2,\cdots,\nu}$ και $\boxed{s = s_1 + s_2 + + s_\nu \leq \kappa}$ (4) για δεδομένους s_i , $i = 1,2,\cdots,\nu$ τότε το πλήθος των λύσεων είναι $\binom{\nu+\kappa-s-1}{\kappa-s}$.
Αυτό αποδεικνύεται ως εξής :
Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y_i = x_i - s_i$ (5) , $I = 1,2, \cdots, \nu$ η (3) και οι προηγούμενοι περιορισμοί γίνονται $\boxed{y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = \kappa - s}$ (6) , $y_i \geq 0$, $i = 1,2,\cdots,\nu$ και $\kappa - s$ μη αρνητικός ακέραιος

Επειδή ο μετασχηματισμός (5) είναι αμφιμονοσήμαντος σε κάθε ακέραια λύση $(r_1, r_2, \cdots, r_\nu)$ της γραμμικής εξίσωσης (3) με τους περιορισμούς (4) αντιστοιχεί μια και μόνο μη αρνητική ακέραια λύση $(r_1 - s_1, r_2 - s_2, \cdots, r_\nu - s_\nu)$ της (6) και αντίστροφα. Επομένως βάσει των προηγούμενων παρατηρήσεων σχετικά με το πλήθος των λύσεων χωρίς περιορισμους σε πλήρη αντιστοιχία με την (6) παίρνουμε :

$$(8) \quad \binom{\nu+\kappa-s-1}{\nu-1} = \binom{\nu+\kappa-s-1}{\kappa-1}$$

Συνεπώς για να αποδειχθεί ο ισχυρισμός αρκεί να θέσουμε στην (8) όπου κ το ν, όπου s από την (7) το 2κ-1 και όπου ν το κ+1. Οπότε έχουμε :

$$C_1(\nu,\kappa) = \binom{\nu+\kappa-s-1}{\nu-1} = \binom{\nu+\kappa-s-1}{\nu-1} = \binom{\nu+\kappa-s-1}{\nu-1}$$

Με βάση την αρχή του αθροίσματος προκύπτει

$$C_\nu = \sum_{\kappa=0}^{\left[\frac{(\nu+2)}{2}\right]} \binom{\nu-\kappa+1}{\kappa}$$

αφού

$$s \le \nu \quad \Rightarrow \quad 2\kappa-1 \le \nu$$
$$\Rightarrow \quad \kappa \le \frac{\nu+1}{2}$$

και επομένως $C_\nu = C_{\nu-1} + C_{\nu-2}$, $\nu = 2,3,\cdots$, $C_0 = 1$, $C_1 = 2$
οπότε $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ και $F_\nu + 1 = C_\nu$ (Χαραλαμπίδης, 2000)

1.3 *Οι εφαρμογές των ακολουθιών Fibonacci*

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσίασουμε τις μαθηματικές εφαρμογές των ακολουθιών Fibonacci.

1.3.1 Εφαρμογή Πρώτη (Irving Kaplansky)

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή για υποσύνολα συνόλων ακεραίων είναι η ακόλουθη. Γνωριζουμε από την Συνδυαστική ότι για $n\geq 1$, αν $S_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$ένα σύνολο φυσικών, τότε αποκλείοντας το $\emptyset$ σύνολο, το πλήθος των υποσυνόλων είναι 2^n. Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των υποσυνόλων του S_n χωρίς συνεχόμενους ακέραιους.

Έστω α_n το πλήθος των υποσυνόλων με αυτή την ιδιότητα. Τότε το κενό σύνολο περιλαμβάνεται σε αυτό γιατί αν x,x+1 δύο διαδοχικοί ακέραιοι ώστε $x,x+1\in \emptyset$ τότε οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα για n=3, 4,5 έχουμε :

$n=3$, $S_3= \{1,2,3\}$

Υποσύνολα : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$

$n=4$, $S_4= \{1,2,3,4\}$

Υποσύνολα : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$

$n=5$, $S_5= \{1,2,3,4,5\}$

Υποσύνολα : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{5\}$, $\{1,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{1,3,5\}$

Στην περίπτωση n=5 μπορεί να συμβούν δύο τινά αλληλοαποκλειόμενα. Είτε το 5 είναι στο υποσύνολο οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα οκτώ υποσύνολα του S_4, είτε το 5 είναι στο υποσύνολο οπότε δεν μπορούμε να έχουμε το 4 στο υποσύνολο. Οπότε τοποθετούμε το 5 σε κάθε ένα από τα πέντε υπόσυνολα του S_3, οπότε προκύπτουν τα 5 νέα υποσύνολα που περιέχουν το 5. Συνεπώς έχουμε $\alpha_5= \alpha_4+\alpha_3$.

Γενικεύοντας το προηγούμενο σκεπτικό παίρνουμε $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $n\geq 2$, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=2$.

Αυτή η επαναληπτική σχέση είναι ίδια με την αναδρομική των αριθμών Fibonacci μόνο που οι αρχικές συνθήκες είναι διαφορετικές.

$\alpha_0=1=F_2$, $\alpha_1=2=F_3$, οπότε $\alpha_n=F_{n+2}$, $n\geq 0$.

1.3.2 Εφαρμογή Δεύτερη

Ακολουθεί η εφαρμογή των γεννητριών υποσυνόλων.

Έστω $S_n = \{1,2,3,\cdots,n\}$ για $n\geq 1$. Για κάθε $A\neq \emptyset$ με $A \subseteq S_n$ ορίζουμε ως

$A+1=\{\alpha+1|\alpha\in A\}$

Επί παραδείγματι, για n=4, A={1,2,4} τότε A+1= {2,3,5}και $A\cup(A+1)= S_5$.

Για $n\geq 1$ έστω έστω g_n το πλήθος των υποσυνόλων του S_n τέτοιο ώστε $A\cup(A+1) = S_{n+1}$, δηλαδή των γεννητριών υποσυνόλων. Για κάθε $A\subseteq S_n$ γεννήτριο υποσύνολο ισχύει ότι $1\in A$, για $n\geq 2$, όπου $n\in A$.

Για n= 3 , 4 , 5 έχουμε:

n=3 : {1,3} , {1,2,3}

n=4 : {1,2,4} , {1,3,4} {1,2,3,4}

n=5 : {1,3,5} , {1,2,3,5} {1,2,4,5} , {1,3,4,5} , {1,2,3,4,5}

Παρατηρούμε ότι το γεννήτριο υποσύνολο g_5 για το S_6(n=5) δημιουργείται από αυτά τα υποσύνολα του S_5 (n=4) και από εκείνα τα υποσύνολα του S_4 (n=3) , τοποθετώντας το 5 σε κάθε ένα από τα g_4 γεννήτρια υποσύνολα του S_5 και σε κάθε ένα από τα g_3 γεννήτρια υποσύνολα του S_4 .

Συνεπώς $g_5 = g_4 + g_3$ οπότε γενκεύοντας παίρνουμε:

$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ (1) , $n\geq 3$, $g_1= 1$ (για {1}) , $g_2= 1$ (για {1,2})

Ορίζοντας $g_0 =0$ επεκτείνοντας την επαναληπτική σχέση για $n\geq 2$

και λύνοντας $g_0 = g_2 - g_1 \rightarrow g_0 =1-1=0$

Από τις συνθήκες αυτές και την (1) παίρνουμε : $g_n = F_n$, $n\geq 1$

1.3.3 Εφαρμογή Τρίτη

Εξετάζοντας τις δυαδικές ακολουθίες από 0 και 1. Για $n \geq 1$, υπάρχουν από πολλαπλασιαστική αρχή 2^n δυαδικές ακολουθίες μήκους n που αποτελείται από 0 και 1.

Το ζητούμενο είναι να υπολογιστούν οι ακολουθίες μήκους n όπου δεν υπάρχουν συνεχόμενα 1. Έστω b_n το πλήθος τέτοιων ακολουθιών μήκους n και έστω $b_3=5$. Τότε οι ακολουθίες είναι : 000, 100, 010, 001, 101 και $b_4=8$ έχουμε τις 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1010, 1001, 0101.

Γενικά για $n \geq 2$, έστω μια δυαδική ακολουθία s μήκους n με μη – συνεχόμενα 1 τότε:

(i) Η s λήγει σε 0 : Τότε τα n-1 ψηφία αποτελούνται από όλες τις b_{n-1} δυαδικές ακολουθίες μήκους n-1 με μη – συνεχόμενα 1.

(ii) Η s λήγει σε 1 , ακριβώς 01. Τότε τα n-2 ψηφία – σύμβολα του s μετριούνται από b_{n-2} ακολουθίες μήκους n-2 χωρίς συνεχόμενα 1.

Συμπερασματικά :

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ ,\ n \geq 2\ ,\ b_0=1,\ b_1=2$$

$$\Rightarrow \quad b_n = F_{n+2},\ n \geq 0$$

Υπάρχει ταύτιση των 2 τελευταίων εφαρμογών η οποία μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: Για n=5, αντιστοιχούμε το υποσύνολο {1,4} με την ακολουθία 10010 και το υποσύνολο {1,3,5} με την 10101. Αντιστοιχίζοντας τους ακεραίους των υποσυνόλων του S_n με την σειρά των θέσεων των 1 στις δυαδικές ακολουθίες.

Αν για παράδειγμα το 1 είναι στην i-οστή θέση για $1 \leq i \leq n$ τότε επιλέγουμε i από S_n για να καθορίσουμε την αντιστοίχιση των υποσυνόλων με μη – συνεχόμενους ακεραίους .

1.3.4 Εφαρμογή Τέταρτη

Στο σημείο αυτό ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό θα ασχοληθούμε με μεταθέσεις . Ορίζοντας πάλι $S_n = \{1,2,3,\cdots,n-1, n\}$ για $n\geq 1$, επικεντρωνόμαστε στις μεταθέσεις δηλαδή στις συναρτήσεις $f: S_n \to S_n$ οι οποίες είναι 1-1 άρα και " επί "
ή " επί " και άρα "1-1". Το σύνολο όλων αυτών είναι n!
Για $n\geq 1$ θέλουμε να καθορίσουμε τον αριθμό αυτών των μεταθέσεων f τέτοιες ώστε $|i- f(i)|\leq 1$, για όλα τα i ώστε $1\leq i\leq n$.

Δηλαδή:

(i) $f(1)=1$ ή $f(1)=2$

(ii) $f(n)= n$ ή $f(n)= n-1$

(iii) $f(i)= i-1$ ή $f(ii)= i$ ή $f(i)= i+1$ για όλα τα $2\leq i\leq n-1$

Για n=3 ικανοποιώντας τα παραπάνω βρίσκουμε τις ακόλουθες μεταθέσεις για το S_3:

(1)	$f: S_3\to S_3$	(2)	$f: S_3\to S_3$	(3)	$f: S_3\to S_3$
	$f(1)=1$		$f(1)=1$		$f(1)=2$
	$f(2)=2$		$f(2)=3$		$f(2)=1$
	$f(3)=3$		$f(3)=2$		$f(3)=3$

Για $n\geq 1$, έστω p_n το πλήθος των μεταθέσεων του S_n που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Υπάρουν τότε δύο τινά :

(i) $f(n)= n$ οπότε χρησιμοποιούμε τις μεταθέσεις $f: S_{n-1}\to S_{n-1}$ δηλαδή το πλήθος p_{n-1}

(ii) $f(n)= n-1$ οπότε τότε πρέπει $f(n-1)= n$ αρά χρησιμοποιούμε τις p_{n-2} μεταθέσεις $f: S_{n-2}\to S_{n-2}$

Συνεπώς εξάγουμε την αναδρομική σχέση

$$p_n= p_{n-1}+ p_{n-2} ,\ n\geq 3 ,\ p_1=1,\ p_2=2$$

Οπότε $p_n= F_{n+1},\ n\geq 1$

1.3.5 Εφαρμογή Πέμπτη (Olry Terquem)

Η ακόλουθη εφαρμογή οφείλεται στον Olry Terquem. Θεωρούμε πάλι το $S_n = \{1,2,3,\cdots,n\text{-}1, n\}$ όπου $n\geq 1$. Ενδιαφερόμαστε τώρα για τα υποσύνολα του S_n της μορφής $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\kappa\}$ όπου

(i) $\alpha_1<\alpha_2< \cdots <\alpha_\kappa$ $(\kappa\leq n)$

(ii) α_i περιττός για i περιττό με $i\leq n$ και

(iii) α_i άρτιος για i άρτιο με $i\leq n$

Αυτά τα υποσύνολα αποκλούνται εναλλασσόμενα υποσύνολα του S_n.

Για n=3 έχουμε $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{3\}$

Για n=4, υπάρχουν οκτώ τέτοια υποσύνολα : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3\}$, και $\{3,4\}$.

Έστω t_n το πλήθος των εναλλασσόμενων υποσυνόλων του S_n.

Τότε $t_1=2$, $t_2=3$ και για $n\geq 3$ πράττουμε ως εξής:

Έστω $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_\kappa\}$ ένα εναλλασσόμενο υποσύνολο του S_n όπου

(i) $b_1,b_2,\cdots,b_\kappa$

(ii) b_i είναι περιττός για $i\leq n$ και

(iii) b_i άρτιος για i άρτιο με $i\leq n$

Τώρα εξετάζουμε δύο περιπτώσεις :

1. αν $b_1=1$ τότε $\{ b_2-1 , b_3-1, \cdots, b_\kappa-1\}$ είναι εναλλασσόμενο υποσύνολο του S_{n-1}. Πρακτικά έπεται ότι υπάρχουν t_{n-1} εναλλασσόμενα υποσύνολα του S_n που περιέχουν το 1.
2. Εάν $b_1\neq 1$ τότε $b_1\geq 3$ και $\{ b_1-2 , b_2-2, \cdots, b_\kappa-2\}$ είναι ένα εναλλασσόμενο υποσύνολο του S_{n-2}. Οπότε υπάρχουν t_{n-2} εναλλασσόμενα υποσύνολα του S_n που δεν περιέχουν το 1.

Εφοσον αυτές οι δύο περιπτώσεις καλύπτουν όλες τις πιθανότητες και δεν έχουν τίποτα κοινό, συνεπάγεται ότι :

$$t_n = t_{n-1}+ t_{n-2},\ n\geq 3\ ,\ t_1=2,\ t_2=3$$

$$\Rightarrow\quad t_n = F_{n+1},\ n\geq 1$$

1.3.6 Εφαρμογή Έκτη

Ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο εισαγάγουμε την ακόλουθη εφαρμογή, η οποία μας δίνει πάλι, την αναδρομική σχέση των αριθμών Fibonacci και μπορεί να αποδειχθεί συνδυαστικά ως εξής:

Έστω $S_{10} = \{1,2,3,\cdots,10\}$και τα υποσύνολα $\{2,6\}$, $\{3,8,10\}$, $\{4,6,8,9\}$.

Παρατηρούμε ότι: $|\{2,6\}|=2$ όπου 2 το ελάχιστο στοιχείο $\{2,6\}$, $|\{3,8,10\}|=3$ όπου το 3 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{3,8,10\}$.

$|\{4,6,8,9\}|=4$ όπου το 4 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{4,6,8,9\}$.

Έστω m_n το πλήθος των υποσυνόλων A του S_n όπου το ελάχιστο στοιχείο του A ισούται με το $|A|$.

Παίρνουμε τις περιπτώσεις n=4,5,6.

Για n=4 : έχουμε $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$

Για n=5 : έχουμε $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$,$\{3,4,5\}$

Για n=6 : έχουμε $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$,$\{3,4,5\}$, $\{2,6\}$,$\{3,4,6\}$, $\{3,5,6\}$

Τα πρώτα πέντε υποσύνολα για n=6 είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση n=5. Για τα υπόλοιπα τρια υποσύνολα παρατηρούμε πως καθώς το 6 είναι στοιχείο του καθενός από αυτά τα υποσύνολα το ελάχιστο στοιχείο είναι το λιγότερο το 2. Όσον αφορά τα τρία υποσύνολα για n=4 , σε κάθε περίτωση αυξάνουμε κάθε στοιχείο στο υποσύνολο προσθέτοντας 1 και έπειτα εισάγουμε το 6.

Συνεπακόλουθα έχουμε:

το $\{1\}$ γίνεται $\{1+1, 6\} = \{2,6\}$

το $\{2,3\}$ γίνεται $\{2+1, 3+1, 6\} = \{3,4,6\}$

το $\{2,4\}$ γίνεται $\{2+1, 4+1, 6\} = \{3,5,6\}$

Έτσι λοιπόν $m_6=m_5 + m_4$

Με την ίδια επιχειρηματολογία για $n\geq3$, φθάνουμε στην επαναληπτική σχέση :

$m_n= m_{n-1} + m_{n-2}$, $n\geq3$,

$m_1=1$ (για $\{1\}$), $m_2=1$ (για $\{1\}$)

επομένως $m_n= F_n$, για $n\geq1$

Το εξαγόμενο αποτέλεσμα για n=7 μπορούμε να το αποδείξουμε συνδυαστικά ως εξής:

(1) υπάρχει έα υποσύνολο με ελάχιστο στοιχείο το 1 με σύνολο το {1}

(2) για το ελάχιστο στοιχείο 2, υπάρχουν $\binom{5}{1}$ υποσύνολα εφόσον επιλέγουμε ένα από τα 3, 4, 5, 6, 7

(3) όταν το ελάχιστο στοιχείο είναι το 3 υπάρχουν $\binom{4}{2}$ υποσύνολα αφού δύο στοιχεία επιλέγονται από τα τέσσερα 4,5,6,7

(4) υπάρχει μόνο έν υποσύνολο με ελάχιστο στοιχείο το 4, ττο {4,5,6,7}

Οπότε αθροιστικά το πλήθος των υποσυνολων του S_7 σε κάθε ένα από τα οποία το ελάχιστο στοιχείο ισούται με τον πληθάριθμο του, είναι :

$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 13 = F_7$

Οπότε από το εισαγωγικό παράδειγμα της ενότητας καταλήγουμε πάλι με γενίκευση για n≥1 ότι :

$$m_n = \begin{cases} \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, & \text{n περιττός} \\ \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}, & \text{n άρτιος} \end{cases}$$

$=F_n$

1.4 Συνθέσεις – Παλινδρομήσεις

Σε αυτή την Ενότητα θα μελετήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε ένα ακέραιο ως άθροισμα διαφορετικών προσθετέων ή μερών. Η μέθοδος αυτή καλείται σύνθεση ενός ακεραίου. Για παράδειγμα το 7 γράφεται ως άθροισμα 6+1, 3+1+3 , 7, 1+6, 2+1+1+2+1 και 4+1+2. Κάθε ένα από αυτά τα αθροίσματα καλείται σύνθεση του 7. Παρατηρούμε ότι 6+1 και 1+6 είναι διαφορετικές συνθέσεις, οπότε η διάταξη είναι σχετική. Επίσης η σύνθεση 3+1+3 διαβάζεται το ίδιο και από τις δύο κατευθύνσεις, δηλαδή από αριστερά προς δεξιά και αντίστροφα από δεξιά προς αριστερά. Αυτή η σύνθεση ονομάζεται παλινδρόμηση.

Έστω για παράδειγμα οι ακόλουθες συνθέσεις του 5.

(1)	5	(5)	2+3	(9)	2+2+1	(13)	1+2+1+1
(2)	4+1	(6)	3+1+1	(10)	2+1+2	(14)	1+1+2+1
(3)	1+4	(7)	1+3+1	(11)	1+2+2	(15)	1+1+1+2
(4)	3+2	(8)	1+1+3	(12)	2+1+1+1	(16)	1+1+1+1+1

Προκειμένου να σχηματίσουμε μια φόρμουλα για το πλήθος των συνθέσεων ενός τυχόντα θετικού ακεραίου n , πρώτα παρατειρούμε ότι:

1 + 1 + 1 + 1 +1

1^{o} σύμβολο **+** 2^{o} σύμβολο **+** ··· 4^{o} σύμβολο **+**

Έχουμε πέντε προσθεταίους και 4 σύμβολα ΄΄συν΄΄ **(+)** . Έστω το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ όπου κάθε στοιχείο του συμβολίζει: το 1 το 1^{o} συν **(+)**, το 2 το 2^{o} συν **(+)** και ούτω καθεξής. Υπάρχουν συνολικά $2^4=16$ υποσύνολα του $\{1, 2, 3, 4\}$.

Άρα έχουμε την αντιστοιχία

1+1+1+1+1	→	$\emptyset$
1+ (1+1) + (1+1)	→	$\{2, 4\}$
(1+1+1) + (1+1)	→	$\{1, 2, 4\}$
5	→	$\{1, 2, 3, 4\}$

Άρα υπάρχει μία ΄΄1-1΄΄ αντιστοίχιση μεταξύ των συνθέσεων του 5 και των υποσύνολων του $\{1, 2, 3, 4\}$. Γενικότερα μια ΄΄1-1΄΄ αντιστοίχιση του θετικού ακεραίου n με 2^{n-1} συνθέσεις.

Στο σημείο αυτό μας ενδιαφέρει το πλήθος των συνθέσεων ενός θετικού ακεραίου όπου τα αρθροίσματα αποτελούνται από 1 και 2. Άρα

(n=3): 2+1, 1+2, 1+1+1
(n=4): 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1
(n=5): 2+2+1, 2+1+1+1, 1+2+1+1, 1+1+2+1, 1+1+1+1+1, 2+1+2, 1+2+2, 1+1+1+2

Έστω C_n το πλήθος των συνθέσεων για θετικό ακέραιο n με προσθεταίους 1 και 2. Τότε $C_5 = 8 = 5+3 = C_4 + C_3$

Παρατηρώντας ότι οι πέντε πρώτες συνθέσεις του 5 προκύπτουν προσθέτοντας ΄΄+1΄΄ στις τέσσερις συνθέσεις του 4 και οι τρεις τελευταίες συνθέσεις του 5 προσθέτοντας ΄΄+2΄΄ στις τρεις συνθέσεις του τρια, τελικά προκύπτει η επαναληπτική σχέση $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$, $n \geq 3$, $C_1=1$, $C_2=2$ όπου $C_n = F_{n+1}$, $n \geq 1$.

Όπως προαναφέρθηκε το πλήθος των συνθέσεων του 5 είναι ίσο με το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, 4\}$. Όταν θέλουμε οι συνθέσεις να περιέχουν ΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄ τότε:

1+2+1 → $\{2, 4\}$
1+1+2+1 → $\{3\}$
2+1+2 → $\{1, 4\}$

Όπου η αντιστοιχία εξηγήθηκε παραπάνω. Όταν οι προσθεταίοι είναι περιορισμένοι (΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄) τότε:

(1+1+1) + (1+1) = 3+2 → $\{1, 2, 4\}$

Εάν λοιπόν δεν έχουμε προσθεταίους μεγαλύτερους του 2 πρέπει να αποφύγουμε υποσύνολα με διαδοχικούς ακεραίους. Οπότε το πλήθος των συνθέσεων του 5 με ΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄ προσθεταίους είναι το ίδιο με το πλήθος των υποσύνολων του $\{1, 2, 3, 4\}$ με χωρίς συνεχόμενους θετικούς ακεραίους.
Όπως στην εφαρμογή 1 έχουμε $F_6=F_{4+2}$ και $C_5= F_{5+1} =F_6$.

Ας επικεντρωθούμε τώρα στις παλινδρομήσεις, δηλαδή συνθέσεις που διαβάζονται το ίδιο τόσο από αριστερά προς δεξιά όσο και από δεξιά προς αριστερά. Για παράδειγμα το 5 γράφεται ως παλινδρόμηση ως εξής: 2+1+2, 1+1+1+1+1

Έστω ότι θέλουμε να καταγράψουμε τις παλινδρομήσεις του 11 , F_{12} με ΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄ για προσθεταίους. Για το 11 κάθε παλινδρόμηση θα περιέχει έναν κεντρικό προσθεταίο που είναι περιττός. Οπότε θα είναι το ΄΄1΄΄ στην περίπτωσή μας. Δεξιά του ΄΄1΄΄ γράφουμε ΄΄+΄΄ που ακολουθείται από E_6 συνθέσεις του 5. Έπειτα αριστερά του ΄΄1΄΄ τοποθετούμε με ανάστροφη σειρά ότι και δεξιά του ΄΄1΄΄. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $F_6= 8$ συνθέσεις του 11 που είναι παλινδρομήσεις. Γενικά για n περιττό, ανάμεσα στις F_{n+1} συνθέσεις ενός θετικού ακεραίου n υπάρχουν $F_{\frac{(n+1)}{2}}$,με το $\frac{(n+1)}{2}$ να είναι δείκτης του F, παλινδρομήσεις.

Για να καθορίσουμε το πλήθος των παλινδρομήσεων ανάμεσα στις F_{13} συνθέσεις του 12, υπάρχουν δύο περιπτώσεις για το κεντρικό σύμβολο:

1) Αν το κεντρικό σύμβολο είναι ΄΄+΄΄ τότε τοποθετούμε μια από τις F_7 συνθέσεις του 6 στα δεξιά του ΄΄+΄΄ και αριστερά ακριβώς το ίδιο με ανάστροφη σειρά.
2) Εάν το κεντρικό σύμβολο είναι ένας προσθεταίος πρέπει να είναι άρτιος δηλαδή 2 (αφού χρησιμοποιούμε μόνο ΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄) . Τότε τοποθετούμε ένα ΄΄+΄΄ δεξιά και αριστερά του 2 προσθέτοντας μια από τις F_6 συνθέσεις του 5 δεξιά όπως και αριστερά την αντίστοιχη ανάστροφη εικόνα.

Συνολικά λοιπόν έχουμε $F_8 = F_7 + F_6$ παλινδρομήσεις. Στη γενική περίπτωση όταν n άρτιος θετικός ακέραιος ανάμεσα στις F_{n+1} συνθέσεις του n υπάρχουν :

$$F_{\frac{n}{2}} + F_{\left(\frac{n}{2}\right)+1} = F_{\left(\frac{n}{2}\right)+2} = F_{\frac{(n+4)}{2}}$$

συνθέσεις που είναι παλινδρομήσεις.

Η ακόλουθη εφαρμογή οφείλεται στο Eugen Netto όπου μελέτησε τις συνθέσεις ενός θετικού ακεραίου n , όπου μπορούν αν χρησιμοποιηθούν όλοι οι δυνατοί προσθεταίοι εκτός του 1. Έστω e_n το πλήθος των παραπάνω συνθέσεων. Τότε:

n	e_n	Συνθέσεις
1	0	-
2	1	2
3	1	3
4	2	4, 2+2
5	3	5, 2+3, 3+2
6	5	6, 2+4, 3+3, 4+2, 2+2+2

Το πλήθος των e_n συνθέσεων αποκτάται

(i) Από τις e_{n-1} συνθέσεις των n-1 προσθέτοντας ΄΄+1΄΄ στο τελευταίο προσθεταίο της κάθε σύνθεσης.

(ii) Από τις e_{n-2} συνθέσεις των n-2 προσθέτοντας ΄΄+2΄΄ σε κάθε μια από αυτές τις συνθέσεις.

Οπότε:

$$e_n = e_{n-1} + e_{n-2}, \ , n \geq 3, \ e_1=0, \ e_2=1$$

και

$$e_n = F_{n-1}, \ n \geq 1$$

Έστω οι παλινδρομήσεις που εμφανίζονται στις F_{n-1} συνθέσεις του n για n=15. Για κάθε περιττό n , ο κεντρικός προσθεταίος πρέπει να είναι περιττός. Αφού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 1 , ο αμέσως επόμενως μικρότερος είναι το 3. Προσθέτουμε ένα ΄΄+΄΄ αριστερά και δεξιά του 3, και στα δεξιά του μια από τις F_5 συνθέσεις του 6. Από αριστερά ισχύει το ίδιο με ανάστροφη σειρά. Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε εάν ο κεντρικός προσθεταίος είναι το 5, συνεχίζοντας δεξιά και αριστερά του με μια από τις F_4 συνθέσεις του 5. Στη πορεία διαπιστώνουμε ότι το 13 δεν μπορεί αν χρησιμοποιηθεί ως κεντρικός προσθεταίος αφού θα μπούν εκατέρωθέν του ΄΄1΄΄. Ωστόσο θεωρούν το 15 ως μια παλινδρόμηση από μόνο του. Άρα έχουμε:

Κεντρικός Προσθεταίος - Στοιχείο	Αριθμός Παλινδρομήσεων
3	F_5
5	F_4
7	F_3
9	F_2
11	F_1
13	F_0
15	1

Συνεπώς:

$$F_5 + F_4 + F_3 + F_2 + F_1 + F_0 + 1 = \sum_{r=0}^{5} F_r \quad +1 \quad =(F_7-1) +1= F_7$$

Αυτό γενικεύεται ως:

Για κάθε n≥3 περιττό

$$F_{\frac{(n-5)}{2}} + F_{\left(\frac{(n-5)}{2}\right)-1} + F_{\left(\frac{(n-5)}{2}\right)-1} + \cdots + F_1 + F_0 + 1 = \sum_{r=0}^{\frac{(n-5)}{2}} F_r \quad +1 =$$

$$=(F_{\left(\frac{(n-5)}{2}\right)}-1) + 1 = F_{\frac{(n-1)}{2}}$$

Από ιδιότητα 3.

Για τις παλινδρομήσεις του 14, το κεντρικό σύμβολο είναι ΄΄+΄΄ ή ένας από τους επτά άρτιους θετικούς ακέραιους 2,4,⋯,12,14. Καταλήγουμε στον εξής πίνακα:

Πίνακας 1 Κεντρικό Σύμβολο - Πλήθος Παλινδρομήσεων

Κεντρικό Σύμβολο	Πλήθος Παλινδρομήσεων
+	F_6
2	F_5
4	F_4
6	F_3
8	F_2
10	F_1
12	F_0
14	1

Συνεπώς το άθροισμα των παλινδρομήσεων είναι από ιδιότητα 3

$$\sum_{r=0}^{6} F_r \quad +1 \quad =(F_8-1)+1=F_8$$

Στην γενική περίπτωση για n≥2 θετικό άρτιο ακέραιο ανάμεσα στις F_{n-1} συνθέσεις του n, το πλήθος των παλινδρομήσεων είναι:

$$F_{(\frac{n}{2})-1} + F_{(\frac{n}{2})-2} + \cdots + F_1 + F_0 + 1 = \sum_{r=0}^{(\frac{n}{2})-1} F_r \quad +1 =$$

$$=\left(F_{((\frac{n}{2})-1)+2} - 1\right) + 1 = F_{\frac{(n+2)}{2}}$$

Από ιδιότητα 3.

Μια τελευταία εφαρμογή για την παρούσα ενότητα αποτελεί οι συνθέσεις θετικών ακεραίων όπου τα αθροίσματα τους είναι περιττοί θετικοί ακέραιοι. Έστω d_n το πλήθος αυτών των συνθέσεων.
Τότε:

n	Συνθέσεις του n	d_n
1	1	1
2	1+1	1
3	3, 1+1+1	2
4	3+1, 1+3, 1+1+1+1	3
5	3+1+1, 1+3+1, 1+1+1+1+1,5, 1+1+3	5

Σχετικά με τις παραπάνω παλινδρομήσεις όταν n είναι άρτιος, χρειάζεται μόνο να σκεφτούμε όταν το κεντρικό σύμβολο είναι ΄΄+΄΄, καθώς δεν μπορούμε να έχουμε άρτιο κεντρικό άθροισμα. Ανάμεσα λοιπόν στο πλήθος των F_n συνθέσεων του n, το πλήθος των παλινδρομήσεων είναι $F_{\frac{n}{2}}$, δηλαδή το πλήθος των συνθέσεων του $\frac{n}{2}$ όπου οι προσθεταίοι είναι άρτιοι.

Για n περιττό, α εξετάσουμε τη περίπτωση n=15. Για τις παλινδρομήσεις ενός περιττού θετικού ακεραίου, ο κεντρικός προσθεταίος πρέπει να είναι περιττός. Ξεκινώντας με το κεντρικό προσθεταίο ΄΄1΄΄ τοποθετούμε ένα ΄΄+΄΄ δεξιά του μαζί με ένα από τις F_7 συνθέσεις του 7, όπου οι προσθεταίοι είναι περιττοί. Στα αριστερά βάζουμε την ίδια σύνθεση με ανάστροφη σειρά. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για τα κεντρικά αθροίσματα 3,5,···,13 παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2 Κεντρικό Άθροισμα - Πλήθος Παλινδρομήσεων

Κεντρικό Άθροισμα	Πλήθος Παλινδρομήσεων
1	F_7
3	F_6
5	F_5
7	F_4
9	F_3
11	F_2
13	F_1
15	1

Συμπερασματικά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3 , ανάμεσα στις F_{15} συνθέσεις του 15, το πλήθος των παλινδρομήσεων είναι:

$$\sum_{r=1}^{7} F_r \quad +1 \quad =(F_9-1) +1= F_9$$

Για n περιττό με n≥3, παίρνουμε την ακόλουθη γενική σχέση:

$$\sum_{r=1}^{\frac{(n-1)}{2}} F_r \quad +1= \quad =(F_{(\frac{(n-1)}{2})}-1) + 1= F_{\frac{(n+3)}{2}}$$

Από την ιδιότητα 3.

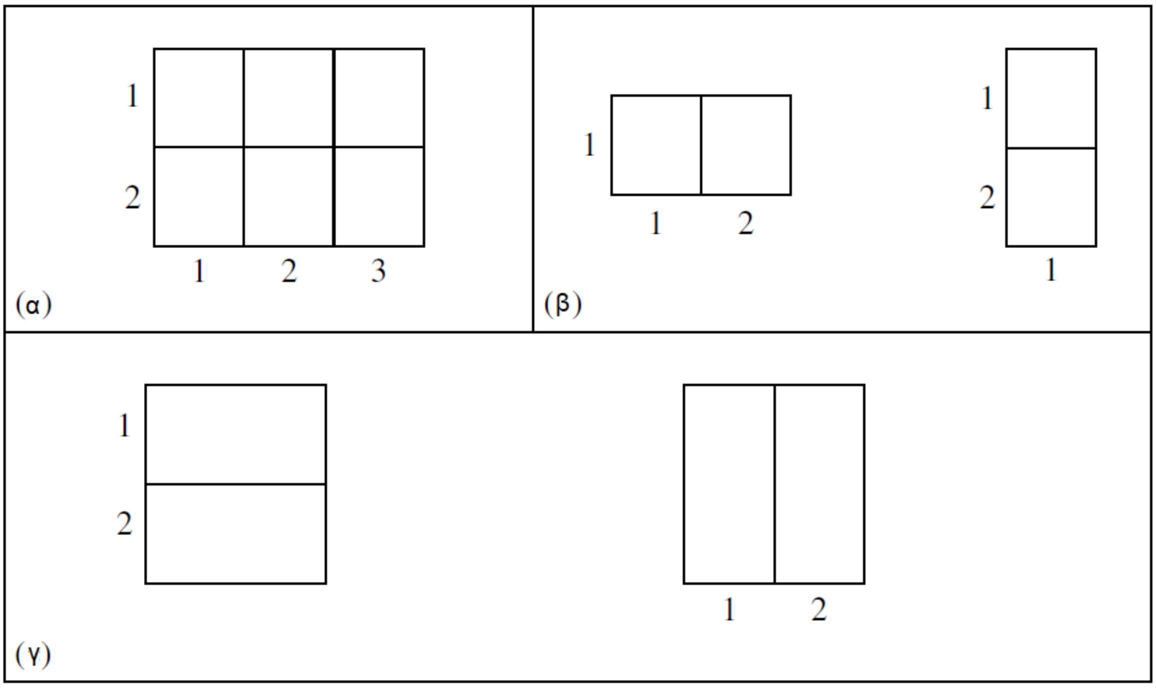
2. Κεφάλαιο Δεύτερο

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται την διαιρετότητα των ακολουθιών Fibonacci και την αντιστοιχία των ιδιοτήτων τους με διάφορα συμπεράσματα για παίγνια όπως το σκάκι ,η οπτική και η βοτανική.

2.1 *Διαιρετότητα των ακολουθιών Fibonacci*

Περαιτέρω ιδιότητες των αριθμών Fibonacci προκύπτουν καθώς εξετάζουμε προβλήματα για κάλυψη με ποικίλους τύπους κομματιών σκακίερας.

2.1.1. Παράδειγμα 1ο



Εικόνα 5 Σκακιέρα

Έστω μια $2\times n$ σκακίερα όπου $n\geq 1$. Η περίπτωση για $n=3$ φαίνεται στην εικόνα 5 (α). Θέλουμε να καλύψουμε μια τέτοια σκακιέρα χρησιμοποιώντας 1×2 οριζόντιες πλάκες, όπου επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 2×1 κάθετες πλάκες, οι οποίες φαίνονται στην εικόνα 5 (β). Για $n\geq 1$, έστω q_n το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να καλύψουμε μια $2\times n$ σκακίερα χρησιμοποιώντας 1×2 και 2×1 πλάκες. Τότε $q_1 =1$, αφού μια 2×1

σκακιέρα απαιτεί μια 2×1 κάθετη πλάκα. Μια 2×2 σκακιέρα μπορεί να καλυφθεί με δύο τρόπους, χρησιμοποιώντας δύο 1×2 οριζόντια ή 2×1 κάθετες πλάκες, όπως απεικονίζεται στην εικόνα 5 (γ). Άρα q_2 =2 .

Για n≥3 θεωρούμε την τελευταία n^{η} στήλη μιας 2xn σκακιέρας, η οποία μπορεί να καλυφθεί με δύο τρόπους:

i. Με μία 2×1 κάθετη πλάκα οπότε η υπολοιπόμενη 2×(n-1) σκακιέρα καλύπτεται με q_{n-1} τρόπους.
ii. Με τα δεξιά τετράγωνα δύο 1×2 οριζοντίων πλακών τοποθετούμενες η μια πάνω από την άλλη, οπότε η υπολοιπόμενη 2×(n-2) σκακιέρα μπορεί να καλυφθεί με q_{n-2} τρόπους.

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) είναι ανεξάρτητες οπότε καταλήγουμε ότι:

$q_n=q_{n-1} + q_{n-2}$, n≥3, q_1 =1 , q_2 =2

και

$q_n=F_{n+1}$

2.1.2. Παράδειγμα 2ο

Ας εξετάσουμε την περίπτωση μιας 1xn σκακίερας την οποία θέλουμε να καλύψουμε με 1×1 τετράγωνα και 1×2 ορθογώνιες πλάκες όπως στην εικόνα 6 (α). Στην εικόνα 6 (β) αναπαρίστανται οι δυνατές καλύψεις τετραγώνων – ορθογώνιων πλακών μιας 1×4 σκακιέρας.

Αν ορίσουμε ως l_n το πλήθος των τρόπων κάλυψης μιας 1xn σκακιέρας με τεράγωνες – ορθογώνιες πλάκες, τότε l_4=5. Για να αποκτήσουμε μια επαναληπτική σχέση για το l_n , ας εξετάσουμε το τελευταίο $n^{\underline{o}}$ τετράγωνο σε μια 1xn σκακιέρα για n≥3.

Υπάρχουν τότε δύο περιπτώσεις:

i. Το $n^{\underline{o}}$ τετράγωνο να καλυφθεί από την 1×1 τετράγωνη πλάκα οπότε τα n-1 τετράγωνα της 1× (n-1) σκακιέρας μπορούν να καλυφθούν με l_n-1 τρόπους.

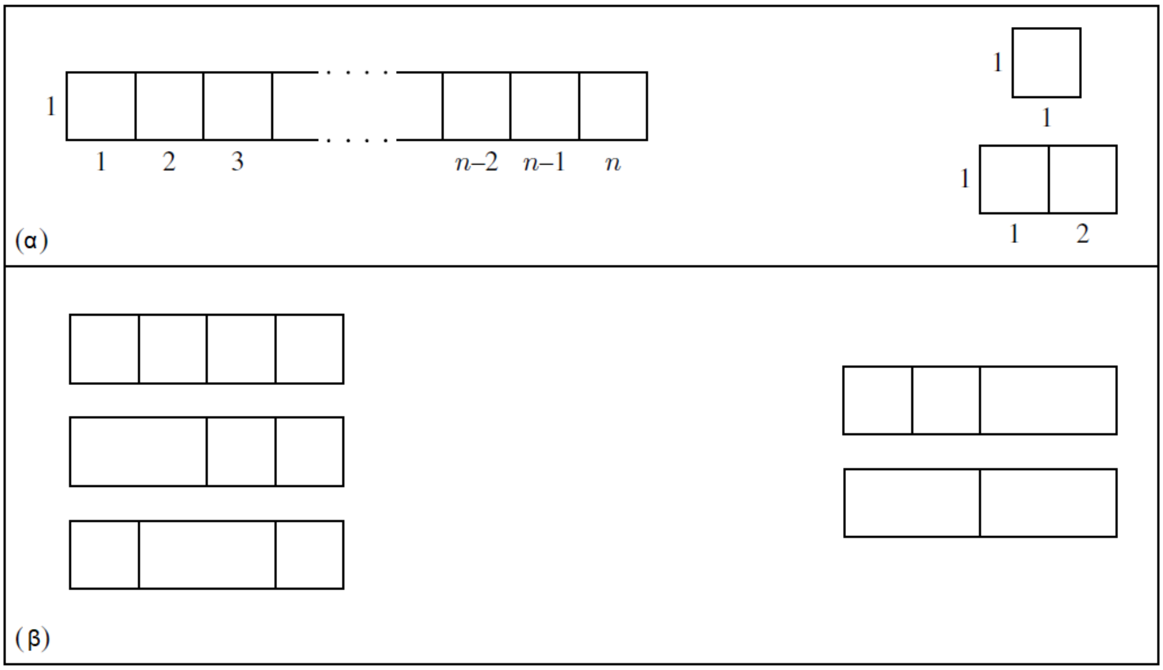
ii. Το $n^{\underline{o}}$ τετράγωνο, και το $(n-1)^{\underline{o}}$ τετράγωνο μπορούν και τα δύο να καλυφθούν από μια 1x2 ορθογώνια πλάκα οπότε τα n-2 τετράγωνα της 1×(n-2) σκακιέρας , θα καλυφθούν με l_{n-2} τρόπους.

Εφόσον οι δύο πιο πάνω περιπτώσεις δεν έχουν τίποτα κοινό μεταξύ τους, έπεται ότι:

$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, $n \geq 3$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$

και

$l_n = F_{n+1}$, $n \geq 1$



Εικόνα 6 Κομμάτια Σκακιέρας

Όπως βρήκαμε στην εφαρμογή 1.4 για το c_n , το πλήθος των συνθέσεων του n με χρήση μόνο ΄΄1΄΄ και ΄΄2΄΄ ως προσθεταίους, χρησιμοποιώντας την έννοια των καλύψεων με πλάκες , παρέρχεται μια 2^{η} απόδειξη της σχέσης:

Για $n \geq 0$,

$$\sum_{r=0}^{n} F_r = F_{n+2} - 1$$

Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί συνδυαστικά . Αρχικά θα ξεκινήσουμε με μια σκακιέρα 1× (n+1). Από τα προηγούμενα επιχειρήματα εντοπίζουμε ότι η εν λόγω σκακιέρα μπορεί μπορεί να καλυφθεί με F_{n+2} τρόπους(1). Θα καταγράψουμε αυτές τις καλύψεις σύμφωνα με το που θα βρούμε την τελευταία 1×2 ορθογώνια πλάκα πάνω στη σκακιέρα.

Από εδώ και πέρα θα καλείται μια 1×2 ορθογώνια πλάκα ως ορθογώνιο.
Εάν δεν υπάρχουν 1×2 ορθογώνια στην κάλυψη, τότε η συμπλήρωση των κενών γίνεται με 1×1 τετράγωνα, δηλαδή n+1 από αυτά.

Για $2 \leq i \leq n+1$, αν το τελευταίο ορθογώνιο καταλαμβάνει i-1 και i , τότε υπάρχουν 1×1 τετράγωνα στις θέσεις i+1 έως n+1. Τα i-2 τετράγωνα στα αριστερά του τελευταίου ορθογωνίου σε μια 1x(n+1) σκακιέρα μπορούν να συμπληρωθούν με $F_{(i-2)+1} = F_{i-1}$ τρόπους.

Συνεπαγωγικά,
το συνολικό πλήθος καλύψεων είναι:

$$1 + \sum_{i=2}^{n+1} F_{i-1} = 1 + \sum_{r=1}^{n} F_r = 1 + \sum_{r=0}^{n} F_r \tag{2}$$

Από (1) και (2) καταλήγουμε, εξισώνοντας τους διαφορετικούς αυτούς τρόπους κάλυψης μιας 1×(n+1) σκακιέρας ,

$$\sum_{r=0}^{n} F_r = F_{n+2} - 1$$

2.1.3. Εφαρμογές.

Η ακόλουθη εφαρμογή των ακολουθιών Fibonacci παρατίθενται γράφωντας αρχικά κάποια αποτελέσματα, έπειτα τεκμηριώνεται και αποδεικνύεται συνδυαστικά.

Για n≥0

i. $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_2F_{n+1} + F_1F_n$
ii. $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+1} + F_n + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n = 2F_{n+1} + 1F_n = F_3F_{n+1} + F_2F_n$
iii. $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2} = (2F_{n+1} + F_n) + (F_{n+1} + F_n) = 3F_{n+1} + 2F_n = F_4F_{n+1} + F_3F_n$
iv. $F_{n+5} = F_{n+4} + F_{n+3} = (F_4F_{n+1} + F_3F_n) + (F_3F_{n+1} + F_2F_n) = (F_4 + F_3) F_{n+1} + (F_3 + F_2) F_n = F_5F_{n+1} + F_4F_n$

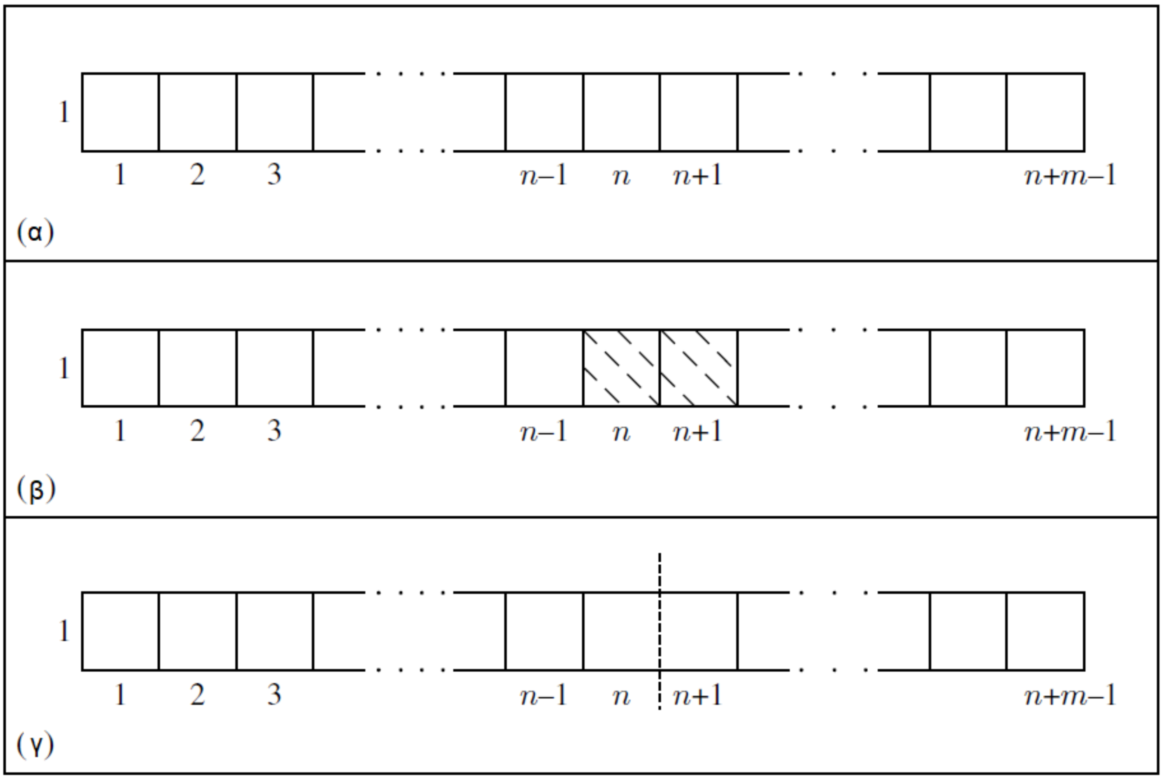
<u>Ιδιότητα:</u>

Για m≥1 και n≥0

$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1} F_n$

Εφόσον η ισότητα αληθεύει για m≥1 όταν n=0 και για κάθε n≥1 όταν m=1 , θα επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα για m≥2 και n≥1.

Ας ξεκινήσουμε με την 1× (n+m-1) σκακιέρα όπως φαίνεται στην εικόνα 7 (α) .



Εικόνα 7 Κομμάτια Σκακιέρας 2

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα για το l_n, η σκακιέρα μπορεί να καλυφθεί με $F_{(n+m-1)+1} = F_{n+m}$ τρόπους. Μπορούμε να υπολογίσουμε την κάλυψη με έναν 2^o τρόπο ανάλογα με το τι συμβαίνει στο $n^{\underline{o}}$ τετράγωνο πάνω στη σκακιέρα:

i. Υποθέτουμε ότι 1×2 ορθογώνιο καλύπτει τα τετράγωνα n και n+1 σε μια 1× (n+m-1) σκακιέρα όπως φαίνεται στην εικόνα 7 (β). Αυτό συνεισφέρει για $F_{(n-1)+1} = F_n$ καλύψεις των n-1 τετράγωνων στα αριστερά του $n^{\underline{o}}$ τετράγωνου στη σκακιέρα, και $F_{((n+m-1)-(n+1)+1)} = F_{m-1}$ καλύψεις των (n+m-1) - (n+1) = m-2 τετραγώνων στα δεξιά του $(n+1)^{\underline{o}}$ τετραγώνου. Οπότε έχουμε συνολικά $F_{m-1}F_n$ καλύψεις σε αυτή τη περίπτωση.
ii. Κάθε άλλη πιθανή κάλυψη της 1× (n+m-1) σκακιέρας μπορεί να χωριστεί στη κάθετη άκρη που διαχωρίζει το $n^{\underline{o}}$ τετράγωνο από το $(n+1)^{\underline{o}}$ τετράγωνο της σκακιέρας. Αυτό απεικονίζεται στην εικόνα 7(γ) . Κάτω από αυτές τις συνθήκες υπάρχουν F_{n+1} τρόποι κάλυψης των πρώτων n τετραγώνων και $F_{((n+m-1)-n)+1} = F_m$ τρόποι να καλυφθούν τα υπόλοιπα (n+m-1)- n = m-1 τετράγωνα της σκακιέρας. Συνεπώς υπάρχουν $F_m F_{n+1}$ τρόποι πιθανών καλύψεων.

Εξισώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα για τους τρόπους κάλυψης μιας 1× (n+m-1) σκακιέρας, προκύπτει :

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1} F_n \qquad (3)$$

Κάνοντας χρήση της (3) μπορούμε να αποδείξουμε μια άλλη ιδιότητα των ακολουθιών Fibonacci.

Για m≥1 και n≥0, ισχύει η (3)

i. Τώρα για n=m≥1, $F_{2n}= F_{n+n}= F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_n (F_{n+1} + F_{n-1})$. Άρα το F_n διαιρεί το F_{2n}, για n≥1.
ii. $F_{3n}= F_{n+2n}= F_{2n}F_{n+1} + F_{2n-1}F_n$ και F_n διαιρεί το F_{2n}, άρα για n≥1 το F_n διαιρεί το F_{3n}.
iii. $F_{(\kappa+1)n} = F_{\kappa n+n} = F_{\kappa n}F_{n+1} + F_{\kappa n-1} F_n$ για n≥1 , κ ≥1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι εάν το F_n διαιρεί το $F_{\kappa n}$, τότε το το F_n διαιρεί το $F_{(\kappa+1)n}$.
iv. Κρατώντας το n σταθερό, για n≥1 , κάνοντας χρήση επαγωγής στο κ, βασιζόμενοι στα αποτελέσματα (i) και (iii) , καταλήγουμε ότι το F_n διαιρεί το $F_{\kappa n}$ για n≥1, κ ≥2. Το ίδο ισχύει και για n≥1 και κ=1.

2.2 *Αντιστοιχία των ιδιοτήτων τους με διάφορα συμπεράσματα για παίγνια*

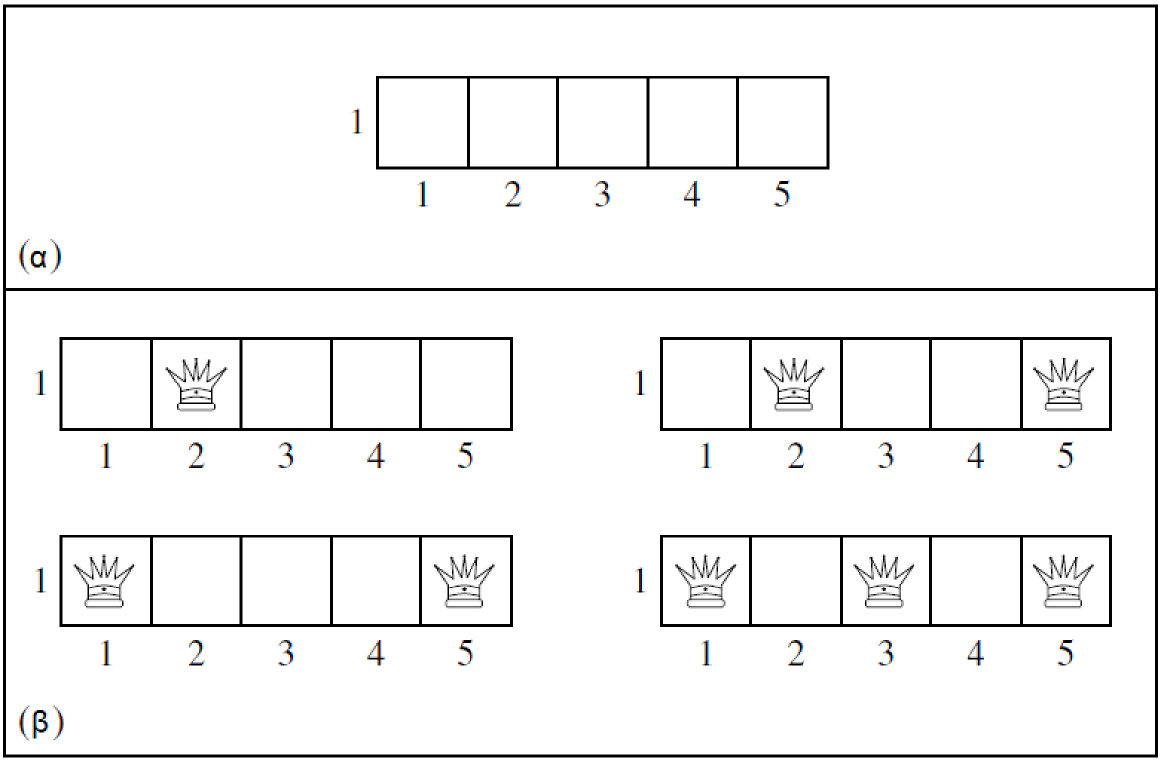
Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε συγκεκριμένους τύπους από πιόνια σε μια σκακιέρα.

2.2.1 Εφαρμογή 1

Σε ένα παιχνίδι σκακιού, ο βασιλιάς μπορεί να μετακινηθεί σε μια 8×8 σκακιέρα , κάνοντας ένα βήμα αριστερά ή δεξιά ή βόρεια ή νότια. Επιπρόσθετα μπορεί να κινηθεί ένα βήμα σε μία από τις τέσσερις διαγώνιες κατευθύνσεις δηλαδή βορειοανατολικά, νοτιοδυτικά, βορειοδυτικά ή τέλος νοτιοδυτικά. Εάν ένα αντίπαλο πιόνι βρίσκεται σε μια από αυτές τις πιθανές οκτώ γειτονικές θέσεις , τότε ο βασιλειάς μπορεί να πάρει το πιόνι.

Περιοριζόμαστε σε μια σκακιέρα που 1×n όπου το n είναι ένας θετικός ακέραιος. Θα μετρήσουμε το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε αήττητους βασιλειάδες σε μια τέτοια σκακιέρα.

Για n=5 η σκακιέρα φαίνεται στην εικόνα 8(α) .



Εικόνα 8 Ο Βασιλιάς στο Σκάκι

Στην εικόνα 8(β) φαίνονται τέσσερις τρόποι τοποθέτησης αήττητων βασιλειάδων στην σκακιέρα.

Αριθμώντας τα τετράγωνα της σκακιέρας από 1 έως 5 βρίσκουμε τις ακόλουθες πιθανές επιλογές θέσεων.

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4
(5) 5
(6) 1, 3
(7) 1,4
(8) 1, 5
(9) 2, 4
(10) 2, 5
(11) 3, 5
(12) 1, 3, 5
(13) ∅ (καμία επιλογή θέσης)

Οπότε υπάρχουν 13= F_7 τρόποι τοποθέτησης. Εάν θέσουμε K_n να μετρά το πλήθος των τρόπω ν με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τις θέσεις σε μια 1×n σκακιέρα οδηγούμαστε, με μέθοδο που ακολουθήσαμε και σε προηγούμενες εφαρμογές, σε μια επαναληπτική σχέση για το K_n.

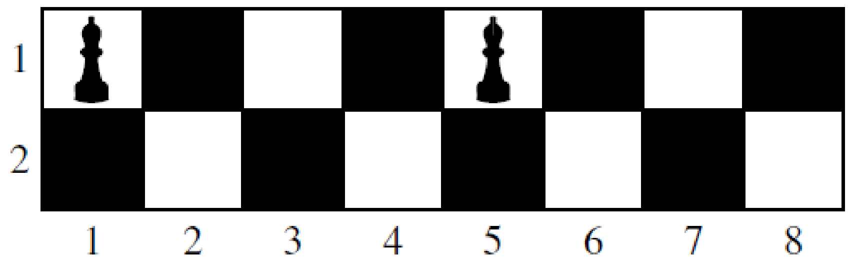
Με μια προσεκτικότερη παρατήρηση διαπιστώνουμε ότι το K_n ουσιαστικά αντιστοιχεί στο πλήθος $\{1 , 2, \ 3, 4, 5\}$ όπου δεν υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι.

Από την εφαρμογή 1 του πρώτου κεφαλαίου παίρνουμε,

K_1=2, K_2=3, και K_n=F_{n+2}

2.2.2 Εφαρμογή 2

Σε αυτή την εφαρμογή θα εξετάσουμε το πρόβλημα τοποθέτησης αήττητων αξιωματικών σε μια 2×n για n≥1. Ένας αξιωματικός μπορεί να μετακινηθεί διαγώνια, μπροστά μια θέση ή πίσω μια θέση. Συνεπώς η τοποθέτηση σε μια 1×n σκακιέρα δεν έχει ενδιαφέρον.



Εικόνα 9 Σκάκι – Μαύροι Αξιωματικοί

Για μια 2×n σκακιέρα , ξεκινούμε λαμβάνοντας υπόψη την περίπτωση για n=8 όπου η σκακιέρα φαίνεται στην εικόνα 9. Βασιζόμαστε στην υπόθεση ότι ένας αξιωματικός απασχολεί το άσπρο τετράγωνο στη πρώτη στήλη της 2×8 σκακιέρας. Εφόσον υπάρχουν μόνο δύο γραμμές, μπορεί να κινηθεί ένα τετράγωνο διαγώνια τη κάθε φορά. Για να αποφύγουμε την περίπτωση ένας αξιωματικός να νικήσει έναν άλλο , δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν επιπρόσθετο αξιωματικό στο άσπρο τετράγωνο της δεύτερης στήλης.

Στην περίπτωση που υπάρξει αξιωματικός στο άσπρο τετράγωνο της στήλης 5, τότε δεν μπορεί να τοποθετηθεί επιπλέον άλλος είτε στην 4 στήλη είτε στην 6. Ως γενικός κανόνας ισχύει ότι όταν ένας αξιωματικός ξεκινά σε ένα άσπρο τετράγωνο τότε μπορεί να μετακινηθεί μόνο σε άλλο τετράγωνο του ιδίου χρώματος. Οπότε δεν δύναται να αλληλεπιδράσει με αυτούς που είναι τοποθετημένοι σε αλλόχρωμο τετράγωνο , δηλαδή μαύρο, και αντίστροφα.

Αντικαθιστώντας το 8 με n, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης αήττητων αξιωματικών σε αυτό το ζικζακ μονοπάτι μέσω των n άσπρων τετραγώνων ή n μαύρων τετραγώνων πάνω σε μια 2×n σκακιέρα είναι το ίδιο όπως ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης αήττητων βασιλιάδων πάνω σε μια 1×n σκακιέρα, δηλαδή F^2_{n+2}.

2.2.3 Εφαρμογή 3

Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με μια εφαρμογή που αφορά τα πιόνια πύργους. Στο σκάκι σε κάθε ένα από αυτά επιτρέπεται μια κίνηση, να μετακινηθεί οριζόντια ή κάθετα αλλά όχι διαγώνια πάνω σε οσοδήποτε μη κατειλημμένα κενά είναι επιθυμητό. Έτσι για το σκάκι στην εικόνα 8 , ένας πύργος τοποθετημένος στο τετράγωνο 1 μπορεί να μετακινηθεί κάθετα κάτω στο τετράγωνο 2 νικώντας ένα πύργο που συμβαίνει να βρίσκεται στο τετράγωνο 2. Στο ίδιο σκάκι, ένας πύργος στο τετράγωνο 2 μπορεί να μετακινηθεί κάθετα στο τετράγωνο 1 ή οριζόντια στο τετράγωνο 3 ή 4, αν το 3 δεν είναι κατειλημμένο.

Όταν ένας πύργος στο τετράγωνο 2 μετακινείται, νικά κάθε πύργο που τυχαίνει να είναι στο τετράγωνο στο οποίο μετακινείται. Για να καθορίσουμε το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης αήττητων πύργων σε μια σκακιέρα, θα εισάγουμε την ιδέα ενός πολυώνυμου - πύργου. Για μια δεδομένη σκακιέρα C, το πολυώνυμο θα δηλώνεται ως r (C,x) και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, ο συντελεστής του x^k στο r (C,x) θα είναι το πλήθος των τρόπων όπου μπορεί κανείς να τοποθετήσει k αήττητους πύργους σε μια σκακιέρα C .

Αυτός ο συντελεστής θα δηλώνται ως r^k (C,x). Για κάθε σκακιέρα C, έχουμε r_o (C,x)=1 , το πλήθων των τρόπων νατοποθετηθούν αήττητοι πύργοι την C . Επίσης r_1 (C,x) , το πλήθος των τρόπων να τοποθετηθεί ένας αήττητος πύργος στο C, είναι απλός ο αριθμός των τετραγώνων πάνω στη σκακιέρα C. Το πολυώνυμο – πύργος για αυτή την σκακιέρα στην εικόνα 10 (α) είναι :

$$r\ (C,x) = 1+ 5x+ 5x^2+ x^3$$

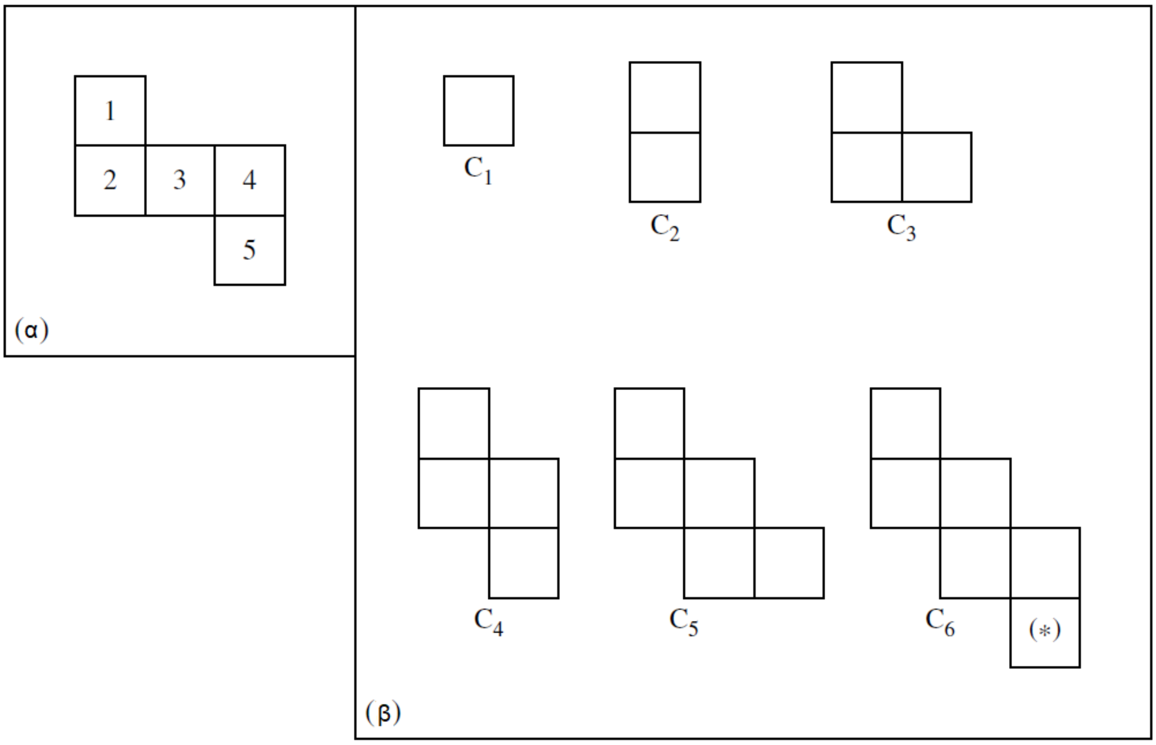
γιατί υπάρχουν

i. πέντε τρόποι να τοποθετήσουμε έναν αήττητο πύργο στο C, απλά χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα πέντε διαθέσιμα τετράγωνα,

ii. πέντε τρόποι να τοποθετήσουμε δύο αήττητους πύργους, χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα 1 και 3, 1και 4 , 1 και 5, 2 και 5 ή 3 και 5,

iii. έναν τρόπο να τοποθετήσουμε τρεις αήττητους πύργους στην C, χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα 1 , 3 και 5.

Όσο η σκακιέρα μεγαλώνει και γίνεται πιο σύνθετη , δεν μπορούμε να καταγράψουμε τα πολυώνυμα – πύργους τόσο άμεσα. Ωστόσο μπορούμε συχνά να αποσυνθέσουμε μια μεγάλη σκακιέρα σε μικρότερες υποσκακιέρες που είναι πιο εύκολο να διαχειριστούν.



Εικόνα 10 Υποσκακιέρες

Αρχικά ας εξετάσουμε το πολυώνυμο – πύργου για τις σκακιέρες C_1, C_2, C_3, C_4 και C_5 όπως φαινεται στην εικόνα 10 (b).

Καταλήγουμε στο επόμενο:

Σκακιέρες	**Πολυώνυμα - Πύργων**
C_1	$1 + x$
C_2	$1 + 2x$
C_3	$1 + 3x + x^2$
C_4	$1 + 4x + 3x^2$
C_5	$1 + 5x + 6x^2 + x^3$

Παρατηρούμε ότι :

$r(C_3,x) = 1+ 3x+ x^2 = (1+2x) + x(1+x)= r(C_2,x) + x\, r(C_1,x)$

$r(C_4,x) = 1 + 4x + 3x^2 = (1 + 3x + x^2) + x(1 + 2x) = r(C_3,x) + x\, r(C_2,x)$

$r(C_5,x) = 1 + 5x + 6x^2 + x^3 = (1 + 4x + 3x^2) + x(1 + 3x+ x^2) = r(C_4,x) + x\, r(C_3,x)$

Αυτό προκύπτει από τον εξής συλλογισμό: Καταρχάς παρατηρούμε ότι σκακιέρες , C_5 και C_6 όπως φαινεται στην εικόνα 10 (b) έχουν μόνο τρεις στήλες. Έπειτα θεωρούμε τη σκακιέρα C_6 στην εικόνα 10 (b), συγκεκριμένα στο τετράγωνο όπου υπάρχει το (*) . Όταν προσπαθούμε να τοποθετήσουμε αήττητους πύργους στη σκακιέρα (για | $0 \leq k \leq 3$) , συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα:

(i) Δεν χρησιμοποιούμε το τετράγωνο με το (*) : Έστω C_6 να είναι η υποσκακιέρα που προκύπτει από την C_6 όπου διαγράφεται το τετράγωνο με το (*). Τότε C_6 = C_5 και $r_k(C_6,x) = r_k(C_5,x)$

(ii) Χρησιμοποιούμε το τετράγωνο με το (*) οποτε τοποθετούμε ένα πύργο στο τετράγωνο: Τώρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κανένα από τα τετράγωνα του C_6 στην ίδια γραμμή ή στήλη όπου αναγράφεται το τετράγωνο με το (*). Αφαιρώντας το τετράγωνο στο οποίο είναι το (*) και όλα τα τετράγωνα στην ίδια σειρά ή στήλη, καταλήγουμε στην υποσκακιέρα C_6''. Τώρα βλέπουμε ότι $C_6'' = C_4$ και για τους υπόλοιπους $k – 1$ πύργους, έχουμε $r_{k-1}(C_6'',x) = r_{k-1}(C_4,x)$.

Συνεπακολουθιακά : για $0 \le k \le 3$

$$r_k(C_6,x) = r_k(C_5,x) + r_{k-1}(C_4,x)$$

όπου συμφωνούμε ότι $r_{-1}(C,x) = 0$ για κάθε σκακιέρα C.

Έτσι καταλήγουμε ότι: $r_k(C_6,x)\, x^k = r_k(C_5,x)\, x^k + r_{k-1}(C_4,x)\, x^k$ για $0 \le k \le 3$.

Οπότε:

$$r(C_6,x) = \sum_{k=0}^{3} r_k (C_6,x)\, x^k = \sum_{k=0}^{3} r_k (C_5,x)\, x^k + \sum_{k=0}^{3} r_{k-1} (C_4,x)\, x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} r_k (C_5,x)\, x^k + x \sum_{k=0}^{3} r_{k-1} (C_4,x)\, x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} r_k (C_5,x)\, x^k + x \sum_{k=0}^{2} r_k (C_4,x)\, x^k =$$

$$= r(C_5,x) + xr(C_4,x)$$

Για τη γενική κατάσταση, έχουμε άλλη μία επαναληπτική κατάσταση:

$r(C_1,x) = 1+ x$, $r(C_2,x) = 1+2x$

και

$r(C_n,x) = r(C_{n-1},x) + x\, r(C_{n-2},x)$ για $n\geq 3$.

Εάν θέσουμε r_n να μέτρα τον συνολικό αριθμό των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε αήττητους πύργους σε μία σκακιέρα C_n, τότε αφότου θέσουμε $x =1$ στο $r(C_n,x)$, βρίσκουμε ότι: $r_n= r(C_n,1)$.

Έτσι λοιπόν:

$$r_1= r(C_1,1) = 1+1= 2$$

$$r_2= r(C_2,1) = 1+2= 3$$

$$r_n= r(C_n,1) = r(C_{n-1},1) + 1\, r(C_{n-2},1) = r_{n-1} + r_{n-2} \text{ για } n\geq 3$$

Συνεπώς για $n\geq 1$, $r_n= F_{n+2}$

2.1.1 Εφαρμογές ακολουθιών Fibonacci στην Οπτική και Βοτανική

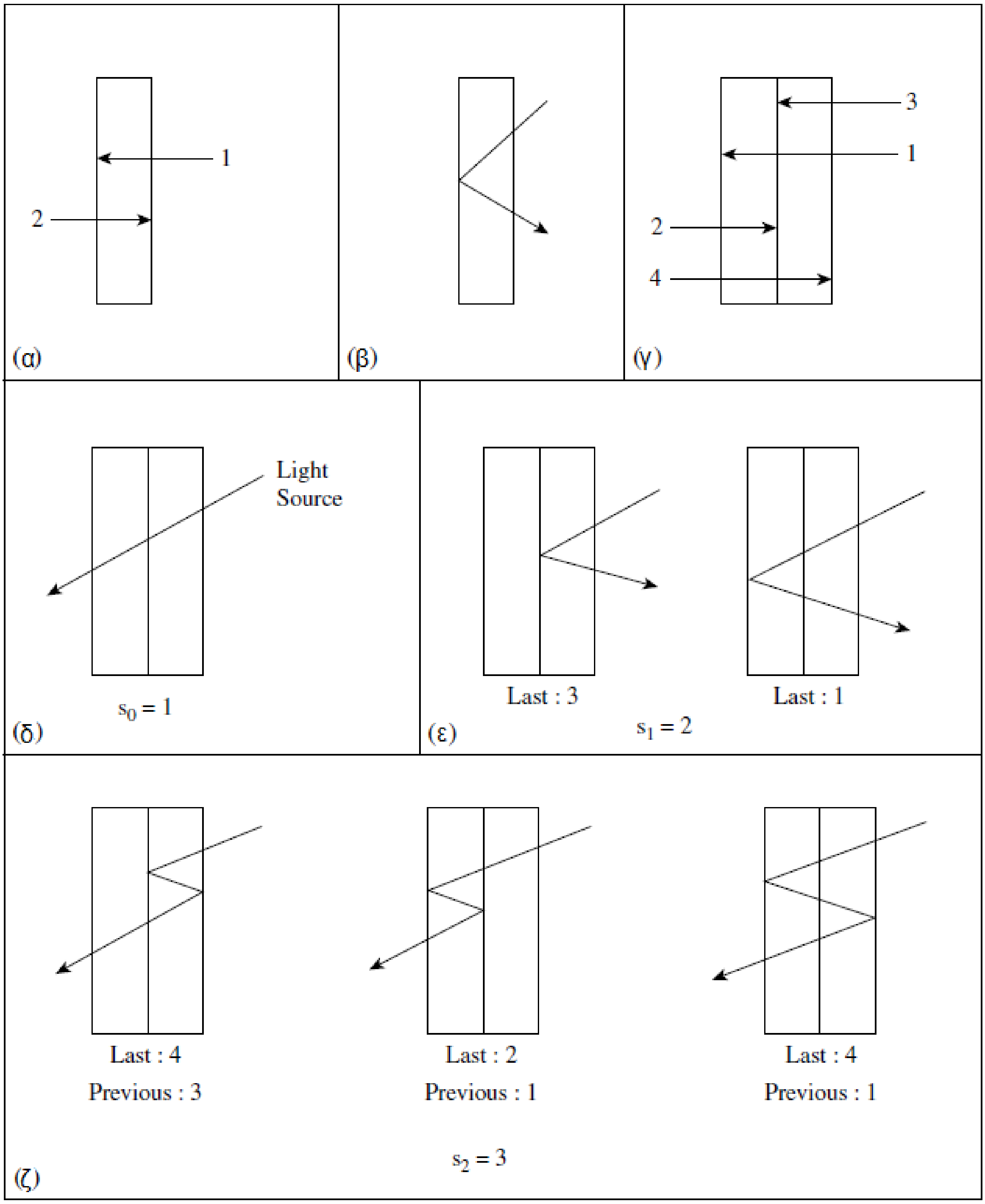
Στην επιστήμη της οπτικής όπου μελετάται η διάδοση του φωτός, προκύπτουν εφαρμογές των ακολουθιών Φιμπονάτσι. Ξεκινώντας θεωρούμε μία γυάλινη πλάκα με δύο αντανακλώμενες επιφάνειες, όπως φαίνεται στην εικόνα 11(α). Εδώ η πρόσοψη 1είναι αυτή στα αριστερά της γυάλινης πλάκας ενώ η πρόσοψη 2 είναι αυτή της δεξιάς μεριάς. Στην εικόνα 11(β), βλέπουμε μία μοναδική αντανάκλαση που συμβαίνει στην πρόσοψη 1, παρατηρώντας αυτή τη γυάλινη πλάκα από το πλάι. Εάν τοποθετήσουμε δύο τέτοιες πλάκες τη μία πίσω από την άλλη όπως φαίνεται στην εικόνα 11(γ) τότε έχουμε τέσσερις αντανακλώμενες επιφάνειες.

Η πρόσοψη 1 και 2 ανήκει στην πλάκα στα αριστερά. Οι προσόψεις 3 και 4 ανήκουν στην πλάκα στα δεξιά. Όταν μία ακτίνα φωτός πέσει στις δύο αυτές γυάλινες πλάκες, έστω S_n το πλήθος των διαφορετικών μονοπατιών όπου μία δέσμη φωτός μπορεί να ακολουθήσει όταν αντανακλάται n φορές, όπου $n \geq 0$. Για παράδειγμα στην εικόνα 11(δ), βλέπουμε την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν αντανακλάσεις, οπότε υπάρχει μόνο ένα δυνατό μονοπάτι και έτσι $S_o=1$.

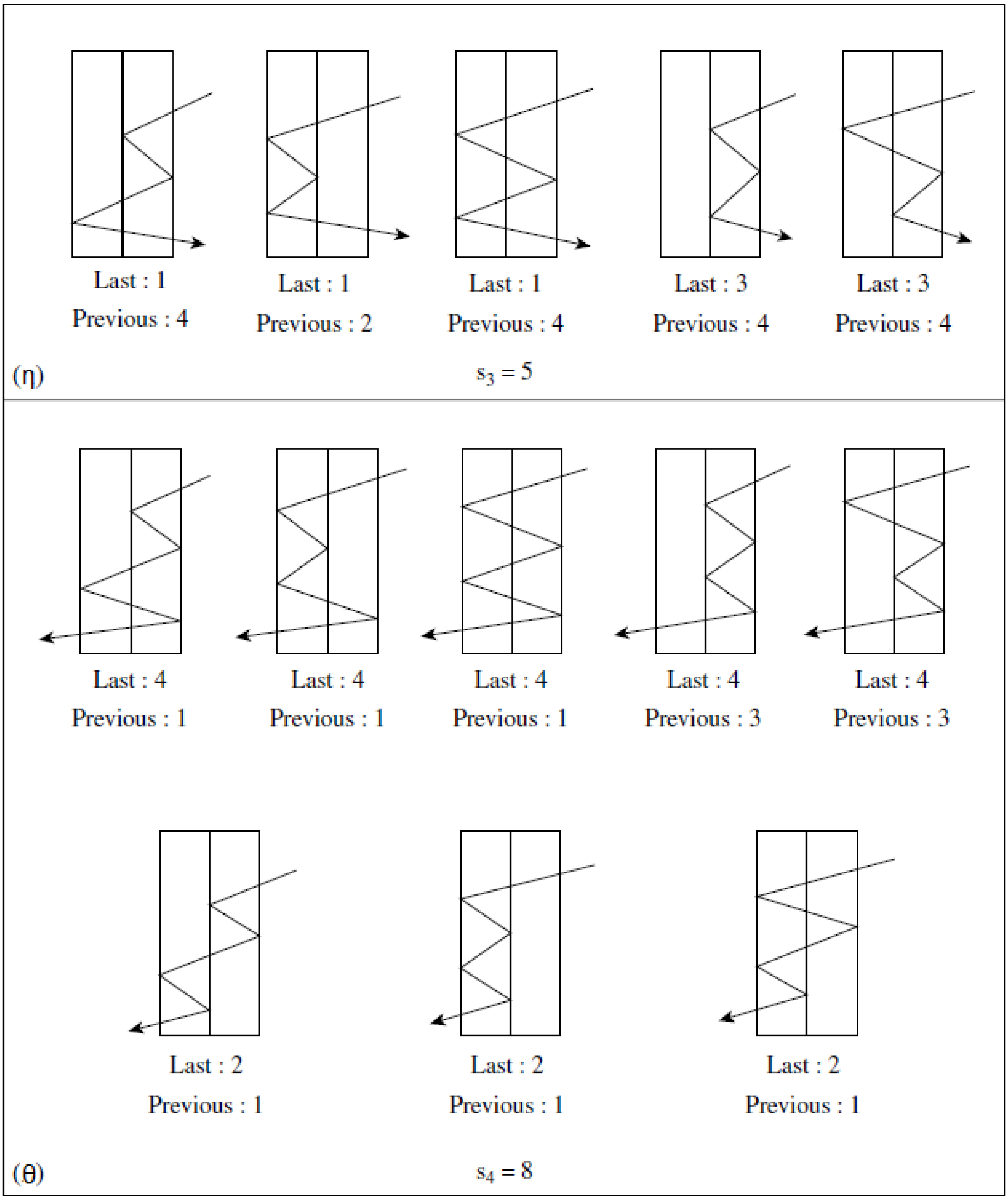
Η εικόνα 11(ε) μας δείχνει δύο δυνατά μονοπάτια όπου μπορούν να συμβούν με μία αντανάκλαση. Έτσι $S_1=2$.
Οι εικόνες 11(ζ) , 12(η) , 12(θ) απεικονίζουν τι συμβαίνει όταν μία δέσμη φωτός αντανακλάται δύο, τρείς και τέσσερις φορές. Παρατηρούμε ότι: $S_2=3$, $S_3=5$ και $S_4=8$.
Σε αυτές τις εικόνες έχουμε καταγράψει κάτω από κάθε σωρό των δύο γυάλινων πλακών πρώτα την πρόσοψη όπου έγινε η τελευταία αντανάκλαση και έπειτα την πρόσοψη όπου συνέβη η προηγούμενη αντανάκλαση.

Ας εξετάσουμε τα πέντε πρώτα μονοπάτια όταν n =4. Σε κάθε περίπτωση η τελευταία αντανάκλαση συμβαίνει στην πρόσοψη 4. Συνεπώς η προηγούμενη αντανάκλαση πραγματοποιείται σε περιττό - αριθμημένη πρόσοψη, την 1 και 3.
Παρατηρούμε ότι η τελευταία αντανάκλαση για όλα τα μονοπάτια για n =3 συμβαίνει στις προσόψεις 1 και 3. Έτσι απλώς παίρνουμε κάθε μονοπάτι για n =3 και αντί να αφήσουμε την δέσμη να αναδυθεί από την πρόσοψη 4, προσθέτουμε μία νέα αντανάκλαση στην πρόσοψη 4 και έχουμε τη δέσμη να αναδυθεί μέσα από την πρόσοψη 1. Με αυτό τον τρόπο τα πέντε πρώτα μονοπάτια για n =4 προκύπτουν άμεσα από τα πέντε μονοπάτια για n =3 . Για να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα τρία μονοπάτια για n =4, παρατηρούμε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η τελευταία αντανάκλαση λαμβάνει χώρα στην πρόσοψη 2. Οπότε προηγούμενη αντανάκλαση πρέπει να συμβεί στην πρόσοψη 1 ή 3.

Στην εικόνα 11(γ) βλέπουμε ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί στην πρόσοψη 3, οπότε η προηγούμενη αντανάκλαση γίνεται στην πρόσοψη 1. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αντανάκλαση στην πρόσοψη ένα μπορεί να προηγηθεί από μία αντανάκλαση σε κάποια από τις άρτιες - αριθμημένες προσόψεις δηλαδή στις 2 ή 4. Έτσι για να πάρουμε τα τελευταία τρία μονοπάτια για n =4, ξεκινούμε με ένα μονοπάτι για n =2. Όμως αντί να επιτρέψουμε η δέσμη φωτός να αναδυθεί από την πρόσοψη 1, προσθέτουμε μία αντανάκλαση στην πρόσοψη 1 ακολουθούμενη από μία αντανάκλαση στην πρόσοψη 2. Στο σημείο αυτό η δέσμη αναδύεται από την πρόσοψη 1, έχοντας ανακλαστεί δύο συνεχόμενες φορές. Έτσι διαπιστώνουμε ότι $S_4= S_3 + S_2$.



Εικόνα 11 Αντανακλάσεις α,β,γ,δ,ε,ζ



Εικόνα 12 Αντανακλάσεις η,θ

Γενικεύοντας, ας λάβουμε υπόψη την περίπτωση όπου n είναι άρτιος, n≥2. Τότε κάθε ένα από τα S_n μονοπάτια αναδύονται από την πρόσοψη 1 και η τελευταία αντανάκλαση συμβαίνει στην πρόσοψη 2 ή 4.

(i) Αν η τελευταία αντανάκλαση συμβαίνει στην πρόσοψη 4, τότε η προηγούμενη συμβαίνει στην 1ή 3. Τώρα αφού n -1 είναι περιττός, κάθε ένα από τα S_{n-1} μονοπάτια (για την n-1 περίπτωση) αναδύονται από την πρόσοψη 4 και η τελευταία συμβαίνει στην 1ή 3. Έτσι μπορούμε να πάρουμε κάθε ένα από τα S_{n-1}

μονοπάτια και να προσθέσουμε μία αντανάκλαση στην πρόσοψη 4 προτού αφήσουμε τη δέσμη να αναδυθεί στη πρόσοψη 1.

(ii) Αλλιώς η τελευταία αντανάκλαση γίνεται στην πρόσοψη 2. Εφόσον η προηγούμενη αντανάκλαση δεν μπορεί να συμβεί στην 3, γίνεται στην 1. Μία αντανάκλαση στην 1 μπορεί να προηγηθεί από μία αντανάκλαση είτε στη 2 είτε στη 4. Έτσι ξεκινάμε με οποιοδήποτε από τα S_{n-2} μονοπάτια (για την n-2 περίπτωση). Αφού n-2 είναι άρτιος, αυτά τα μονοπάτια αναδύονται από την 1 πρόσοψη. Τώρα όμως δεν επιτρέπουμε τη δέσμη να αναδυθεί έως ότου έχουμε προσθέσει μία αντανάκλαση στην 1 ακολουθούμενη από μία στη 2. Συνεπώς για n άρτιο έχουμε : $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$.

Έπεται λοιπόν ότι:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2},\ n \geq 2,\ S_o = 1,\ S_1 = 2 \text{ και } S_n = F_{n+2}.$$

2.1.1.1 Εφαρμογές ακολουθιών Fibonacci στην Βοτανική

Παρόλο που το πρόβλημα των λαγών δεν είναι τόσο ρεαλιστικό, μπορούμε να βρούμε παράδειγματα όπου οι ακολουθίες Φιμπονάτσι εμφανίζονται στη φύση. Συγκεκριμένα στη βοτανική, ένας κλάδος της βιολογίας που αφορά τη ζωή των φυτών, βρίσκουμε ότι οι αριθμοί Φιμπονάτσι μερικές φορές εμφανίζονται όταν μετράμε το πλήθος των πετάλων για ορισμένο λουλούδια. Για παράδειγμα ο αριθμός των πετάλων που αντιστοιχεί στο φυτό Enchanter’s Nightshade (Κιρκέα) είναι 2(=F_3), ενώ για το Iris (Ίρις) και Trilium (Τρίλλιο) , βρίσκουμε 3(=F_4) πέταλα. Στον παρακάτω πίνακα υπάρχει σε λίστα ένας μικρός κατάλογος λουλουδιών με τον αντίστοιχο αριθμό πετάλων που υπάρχουν φυσικά σε κάθε ένα από αυτά.

Λουλούδι	**Αριθμός Πετάλων**
Enchanter’s Nightshade (Κιρκέα)	2(=F_3)
Iris, Trilium (Ίρις, Τρίλλιο)	3(=F_4)
Buttercup, Columbine (Ρανούγκουλος, Κολομπίνα)	5(=F_5)
Celandine (Χελιδονόχορτο)	8(=F_6)
Chamomile, Corn Marigold (Χαμομήλι, Αγριομαργαρίτα)	13(=F_7)
Aster, Black – eyed Susan (Αστήρ, Ρουντμπέκια η δασεία)	21(=F_8)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένας συγκεκριμένος τύπος λουλουδιού μπορεί να μην έχει πάντα τον ίδιο αριθμό πετάλων. Για παράδειγμα το Delphinium (Δελφίνιο) έχει 5(=F_5) πέταλα σε ορισμένες περιπτώσεις και 8(=F_6) σε άλλες.

Στον κλάδο της βοτανικής που ονομάζεται φυλλοταξία, ανακύπτουν περισσότερα παραδείγματα αριθμών Fibonacci. Για παράδειγμα σε συγκεκριμένες βοτανικές δομές όπως η Αγκινάρα, Κουκουνάρια και Ηλίανθους, ο αριθμός των σειρών των κλιμάκων που τα παίρνει ο άνεμος σε μία κατεύθυνση είναι αριθμός Φιμπονάτσι, όπως επίσης και ο αριθμός των σειρών των κλιμάκων που τα παίρνει ο άνεμος σε άλλη κατεύθυνση είναι αριθμός Φιμπονάτσι που προηγείται ή ακολουθεί την πρώτη.

3. Κεφάλαιο Τρίτο

Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύεται η σύνδεση των ακολουθιών με τη χρυσή τομή, η επίλυση της γραμμικής αναδρομικής σχέσης και της μορφής Binet των ακολουθιών, η προβολή αντιστοίχισης αυτής της θεωρίας με εφαρμογές στην τριγωνομετρία, την φυσική, τα συνεχή κλάσματα και τις πιθανότητες.

3.1 Επίλυση γραμμικών σχέσεων επανάληψης: Ο τύπος Binet για Fn

Μέχρι αυτό το σημείο, αν θέλαμε να μάθουμε έναν συγκεκριμένο αριθμό Fibonacci - για παράδειγμα, F_{37} - έπρεπε να ξεκινήσουμε με $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση επανάληψης $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, για υπολογισμό.

(1) $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

(2) $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

(3) $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

(4) $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$\vdots$

(35) $F_{36} = F_{35} + F_{34} = 9,227,465 + 5,702,887 = 14,930,352$

(36) $F_{37} = F_{36} + F_{35} = 14,930,352 + 9,227,465 = 24,157,817$.

Τώρα ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε με κάποιο τρόπο το F_{37}, αλλά χωρίς να εκτελέσουμε κανένα από αυτούς τους 36 υπολογισμούς. Για να το κάνουμε αυτό, θέλουμε να εξαγάγουμε έναν σαφή τύπο για τον γενικό όρο F_n ως προς το n—όχι ως προς τις προηγούμενες τιμές στην ακολουθία των αριθμών Fibonacci. Αυτό θα το πετύχουμε εισάγοντας την ακόλουθη ιδέα:

Για πραγματικές σταθερές $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$, με $C_0 \neq 0$ και $C_k \neq 0$, μια έκφραση της μορφής:

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0,$$

όπου $n \geq k$, ονομάζεται kth-τάξης γραμμική ομοιογενής σχέση υποτροπής με σταθερούς συντελεστές.

Όταν η δεξιά πλευρά αυτής της σχέσης επανάληψης δεν είναι 0, τότε η σχέση αναφέρεται ως μη ομοιογενής.

Θα εστιάσουμε την ανησυχία μας στην περίπτωση όπου $k = 2$, $C_0 = 1$, και $C_2 \neq 0$. Για παράδειγμα,

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0,$$

ή

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$,

είναι μια γραμμική ομογενής σχέση υποτροπής δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για να λυθεί μια τέτοια σχέση επανάληψης, ορίζουμε $a_n = Ar^n$, όπου τα A και r είναι μη μηδενικές σταθερές. Με την αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στη δεδομένη σχέση επανάληψης, βρίσκουμε ότι:

$$Ar^n = 5Ar^{n-1} - 6Ar^{n-2}.$$

Διαιρώντας με το A και με το r^{n-2}, έχουμε $r^2 = 5r - 6$ ή $r^2 - 5r + 6 = 0$, μια τετραγωνική εξίσωση στο r. Αυτή η τετραγωνική εξίσωση στο r ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση. Εφόσον $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $r = 2$ και $r = 3$, και ονομάζονται χαρακτηριστικές ρίζες. Κατά συνέπεια, γενική λύση για

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \text{ ή } a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$$

Έχει τη μορφή για $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$, όπου c1 και c2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Επαληθεύουμε ότι πρόκειται για γενική λύση ως εξής: θεωρώντας τη σχέση επανάληψης ως $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$.

Αντικαθιστώντας το $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$ στην αριστερή πλευρά αυτής της σχέσης επανάληψης, καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&(c_1 2^n + c_2 3^n) - 5(c_1 2^{n-1} + c_2 3^{n-1}) + 6(c_1 2^{n-2} + c_2 3^{n-2}) \\
&= c_1 2^{n-2}(2^2 - 5(2) + 6) + c_2 3^{n-2}(3^2 - 5(3) + 6) \\
&= c_1 2^{n-2}(4 - 10 + 6) + c_2 3^{n-2}(9 - 15 + 6) \\
&= c_1 2^{n-2}(0) + c_2 3^{n-2}(0) = 0,
\end{aligned}$$

επαληθεύοντας απευθείας ότι το $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$ είναι πράγματι η γενική λύση. Πρέπει επίσης να γνωρίζουμε την τιμή του a_n για δύο συγκεκριμένες τιμές του n - γενικά τις αρχικές τιμές (ή τις αρχικές συνθήκες) a_0 και a_1 - τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές για να προσδιοριστούν τα c_1 και c_2. Για παράδειγμα, αν $a_0 = 1$ και $a_1 = 4$, τότε προκύπτει ότι:

$1 = a_0 = c_1 \times 2^0 + c_2 \times 3^0 = c_1 + c_2$
$4 = a_1 = c_1 \times 2^1 + c_2 \times 3^1 = 2_{c1} + 3_{c2}$,

Και θα βρεθεί ότι $c_{1=} -1$ και $c_2=2$. Έτσι:

$a_n = (-1)2^n + 2 \times 3^n$, $n \geq 0$, είναι η μοναδική λύση του προβλήματος της αρχικής τιμής
$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

Είναι επίσης η (μοναδική) λύση του προβλήματος της ισοδύναμης αρχικής τιμής

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad n \geq 0, \ a_0 = 1, \ a_1 = 4.$

Πριν συνεχίσουμε, πρέπει να τονίσουμε ότι λύσαμε μια γραμμική ομογενή σχέση υποτροπής δεύτερης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, που απαιτεί ότι η προκύπτουσα τετραγωνική εξίσωση στο r έχει διακριτές πραγματικές ρίζες. Τώρα ας στραφούμε στη σχέση επανάληψης δεύτερης τάξης.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 2, \ F_0 = 0, \ F_1 = 1.$$

Αρχίζουμε με μια αντικατάσταση: $F_n Ar^n$, $A \neq 0$, $r \neq 0$. Με την αντικατάσταση αυτού στη σχέση επανάληψης, αυτή τη φορά προκύπτει ότι

$$Ar^n = Ar^{n-1} + Ar^{n-2}.$$

Διαιρώντας με A και r^{n-2}, οδηγούμαστε στη χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Ο τετραγωνικός τύπος μας λέει ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι:

$$r=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Είναι ασφαλές να προσδιορίσουμε ότι:

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Συνεπώς,

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \ n \geq 0.$$

Με

$$0 = F_0 = c_1 + c_2$$

Και

$1 = F_1 = c_1\alpha + c_2\beta = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, προκύπτει ότι $c1 = 1/\sqrt{5}$ και $c2 = -1/\sqrt{5}$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να εκφράσουμε ρητά το Fn με

$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n$, $n \geq 0$.

Πριν προχωρήσουμε, ας αποκαλύψουμε μερικές από τις συναρπαστικές ιδιότητες που παρουσιάζονται από α και β. Πρώτο και κύριο,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398\ldots$$

είναι κοινώς γνωστή ως χρυσή τομή, θεϊκή αναλογία, θεϊκή τομή (από τον Johannes Κέπλερ), χρυσός μέσος όρος, ιερό κεφάλαιο (του Λεονάρντο ντα Βίντσι) ή ιερή αναλογία. Αυτό ο αριθμός ήταν γνωστός στους Έλληνες περισσότερα από 1600 χρόνια πριν από την εποχή του Λεονάρντο της Πίζας (γνωστό και ως Φιμπονάτσι).

Ακόμη και πριν από τους Έλληνες, αυτή η εκπληκτική σταθερά χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους Αιγύπτιους στην κατασκευή της Μεγάλης Πυραμίδας της Γκίζας (περίπου 3070 π.Χ.). Περίπου το 1909, ο Αμερικανός μαθηματικός Mark Barr όρισε αυτή τη σταθερά με φ, το ελληνικό γράμμα φι — αυτό προς τιμήν του μεγάλου Έλληνα γλύπτη Φιδέα (περ. 490 π.Χ. – 420 π.Χ.).

Ανάμεσα στις πολλές ιδιότητες που ικανοποιούν τα α και β, έχουμε:

$\alpha^2 = \alpha + 1$		$\beta^2 = \beta + 1$
$\alpha\beta = -1$		$\beta^{-1} = -\alpha$
$\alpha - \beta = \sqrt{5}$	$\alpha^{-1} = -\beta$	$\alpha + \beta = 1$
$\alpha^2 + \beta^2 = 3$		$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$

Αφού $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε τον ρητό τύπο μας για το Fn ως

$$Fn = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ n \geq 0.$$

Αυτή η αναπαράσταση του Fn ονομάζεται μορφή Binet για τους αριθμούς Fibonacci. Ανακαλύφθηκε το 1843 από τον Γάλλο μαθηματικό Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856). Ωστόσο, στην πραγματικότητα, ο τύπος είχε ανακαλυφθεί νωρίτερα - το 1718 - από τον Γάλλο μαθηματικό Abraham DeMoivre (1667–1754).

Λίγο μετά την ανακάλυψη του Binet, το 1844, ο Γάλλος μαθηματικός και μηχανικός Gabriel Lam'e βρήκε επίσης αυτό το αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από την εργασία των άλλων δύο Γάλλων μαθηματικών.

Χρησιμοποιώντας τη φόρμα Binet για το F_n, μπορεί κανείς να εξαγάγει πολλές περισσότερες ταυτότητες που αφορούν τους Αριθμούς Fibonacci.

Ιδιότητα 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

Απόδειξη:

Αφού α = (1 + √ 5)/2 και β = (1 − √ 5)/2, προκύπτει ότι |β/α| = (1 − √ 5)/(1 + √ 5) < 1. Συνεπώς, ως n→∞, βρίσκουμε ότι $|\beta/\alpha|^n \to 0$ και $(\beta/\alpha)^n \to 0$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta\,(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} = \frac{\alpha - \beta(0)}{1 - 0} = \alpha$$

Για τις άλλες δύο ιδιότητές μας, θα βοηθήσει να θυμηθούμε το διωνυμικό θεώρημα:

Για τις πραγματικές μεταβλητές x, y και n, ένας μη αρνητικός ακέραιος,

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n}x^ny^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ και 0!=1

Ιδιότητα 2:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} F_{k} = F_{3n}$$

Απόδειξη: Μαζί με τη φόρμα Binet για το F_n, εδώ θα φανούν χρήσιμα τα εξής:
Αφού $α^2 = α + 1$, έπεται ότι

$$2α + 1 = (α + 1) + α = α^2 + α = α(α + 1) = α(α^2) = α^3.$$

Ομοίως έχουμε $2β + 1 = β^3$. Τώρα ας δούμε πού έρχονται αυτά τα αποτελέσματα.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} F_{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} \left(\frac{\alpha^{k} - \beta^{k}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} \alpha^{k} - \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} \beta^{k} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\alpha)^{k} 1^{n-k} - \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\beta)^{k} 1^{n-k} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} (2α+1)^{n} - \frac{1}{\alpha-\beta} (2β+1)^{n} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} (α^3)^{n} - \frac{1}{\alpha-\beta} (β^3)^{n} \\
&= \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{3n}
\end{aligned}$$

Ιδιότητα 3:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_k^{\,2} \quad = \quad 5^n F_{2n+1}$$

Απόδειξη: Για άλλη μια φορά θα ξεκινήσουμε με τη φόρμα Binet για το Fn. Αυτή τη φορά είναι χρήσιμο να υπενθυμίζουμε ότι αβ = −1.

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_k^{\,2} =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right] \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^k - \beta^k)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^2)^k \quad - \quad 2 \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a\beta)^k \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^2)^k \right.$$

$$\left. - \quad 2 \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k 1^{(2n+1)-k} \quad + \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \quad \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^2)^k \right.$$

$$\left. - \quad 2[(-1)+1]^{2n+1} \quad + \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \quad \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^2)^k \quad + \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (a^2)^k 1^{(2n+1)-k} \right.$$

$$\left. + \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\beta^2)^k 1^{(2n+1)-k} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha-\beta}\right]^2 \quad \left[\left(1+a^2\right)^{2n+1} + \left(1+\beta^2\right)^{2n+1}\right]$$

$$= \quad \left(\frac{1}{5}\right) \left[(2+a)^{2n+1} + \ (2+\beta)^{2n+1}\right]$$

Εφόσον $\alpha^2 = \alpha + 1$, προκύπτει ότι $(2 + \alpha)^2 = 4 + 4\alpha + \alpha^2 = 4(1 + \alpha) + \alpha^2 = 5\alpha^2$.

Ομοίως, $(2 + \beta)^2 = 5\beta^2$.

Έτσι

$$\left(\frac{1}{5}\right) \left[(2+a)^{2n+1} + \ (2+\beta)^{2n+1}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right) \left[\frac{(2+a)^{2n+2}}{(2+a)} + \frac{(2+\beta)^{2n+2}}{(2+\beta)}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left[\frac{((2+\alpha)^{2})^{n+1}}{(2+\alpha)}+\frac{((2+\beta)^{2})^{n+1}}{(2+\beta)}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{5}\right)\left[\frac{(5\alpha^{2})^{n+1}}{(2+\alpha)}\right]+\left(\frac{1}{5}\right)\left[\frac{(5\beta^{2})^{n+1}}{(2+\beta)}\right]$$
$$=5^{n}\left[\frac{\alpha^{2n+2}}{(2+\alpha)}\right]+5^{n}\left[\frac{\beta^{2n+2}}{(2+\beta)}\right]$$
$$=(5^{n})(\alpha^{2n+1})\left(\frac{\alpha}{2+\alpha}\right)+(5^{n})(\beta^{2n+1})\left(\frac{\beta}{2+\beta}\right)$$

Τώρα

$\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 + 1 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha\beta = 2 + \alpha \Rightarrow \alpha(\alpha - \beta) = 2 + \alpha \Rightarrow \alpha/(2 + \alpha) = 1/(\alpha - \beta)$.

Ομοίως, $\beta/(2 + \beta) = -1/(\alpha - \beta)$. Έτσι

$$(5^{n})(\alpha^{2n+1})\left(\frac{\alpha}{2+\alpha}\right)+(5^{n})(\beta^{2n+1})\left(\frac{\beta}{2+\beta}\right)$$
$$=(5^{n})(\alpha^{2n+1})\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)+(5^{n})(\beta^{2n+1})\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)$$
$$=(5^{n})\left[\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right]$$
$$=5^{n}F_{2n+1}$$

3.2 Περισσότερα για α και β: Εφαρμογές στο Τριγωνομετρία, Φυσική, Συνεχή Κλάσματα, Πιθανότητες.

Πριν δώσουμε μερικές περιπτώσεις όπου οι σταθερές α και β μπαίνουν στο παιχνίδι, να αναφέρουμε ότι ο αριθμός α προκύπτει συνεχώς σε κάθε είδους απροσδόκητα μέρη.

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας μερικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

(1) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
(2) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$
(3) $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$

$$\begin{aligned}
&= \cos \theta(2 \cos^2 \theta - 1) - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta \\
&= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
&= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta(1 - \cos^2 \theta) \\
&= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta + 2 \cos^3 \theta - 2 \cos \theta \\
&= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta
\end{aligned}$$

Τώρα έστω $\theta = \pi/10$. Τότε:

$$\frac{\pi}{2} = 5\theta = 2\theta + 3\theta$$

Άρα οι γωνίες 2θ και 3θ είναι συμπληρωματικές γωνίες, και αφού το ημίτονο και το συνημίτονο είναι συναρτήσεις, έπεται ότι $\sin 2\theta = \cos 3\theta$. Επομένως από τις παραπάνω τριγωνομετρικές ταυτότητες διαπιστώνουμε ότι
$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$. Μετά τη διαίρεση με το $\cos \theta$ (ως $\cos\theta \neq 0$), προκύπτει ότι
$2 \sin \theta = 4 \cos^2 \theta - 3 = 4 (1 - \sin^2 \theta) - 3 = -4 \sin^2 \theta + 1$
και
$4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$, μια τετραγωνική εξίσωση σε $\sin \theta$.

Συνεπώς,

$$\sin \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Εφόσον το $\theta = \pi/10$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, $\sin\theta > 0$, άρα $\sin(\pi/10) = \sin \theta = (-1 + \sqrt{5})/4 = -(1/2) \cdot ((1 - \sqrt{5})/2) = -(1/2)\beta = (-(1/2))(-(1/\alpha)) = 1/(2\alpha)$, αφού $\alpha\beta = -1$.
Εν τω μεταξύ,

$$\cos \frac{\pi}{5} = \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} = \frac{(2\alpha^2 - 1)\beta^2}{2\alpha^2\beta^2} =$$

$= \frac{2\alpha^2\beta^2 - \beta^2}{2\alpha^2\beta^2} = \frac{2 - (\beta + 1)}{2}$ (αφού $\alpha\beta = -1$ και $\beta^2 = \beta + 1$)
$= \frac{1 - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (αφού $\alpha + \beta = 1$)

Με $\cos(\pi/5) = \alpha/2$, βρίσκουμε ότι :

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos 3 \left(\frac{\pi}{5}\right) = 4\cos^3 \frac{\pi}{5} - 3 \cos \frac{\pi}{5} = 4 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha$$

$= \frac{1}{2}\alpha\ (\alpha^2 - 3) = \frac{1}{2}\alpha\ (-\beta^2)$ (αφού $\alpha^2 + \beta^2 = 3$)
$= \frac{1}{2}(-\beta)\ (\alpha\beta) = \frac{1}{2}\beta$ (αφού αβ = -1)

Άρα α = 2 cos(π/5) και β = 2 cos(3π/5). Τώρα από τη φόρμα Binet για το F_n , λαμβάνουμε την τριγωνομετρική μορφή για τους αριθμούς Fibonacci, δηλαδή,

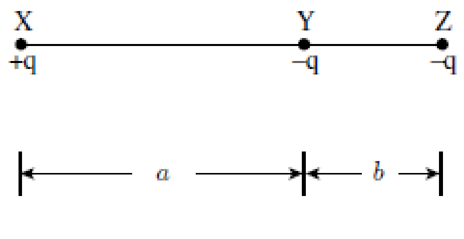
$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{(2\cos(\pi/5))^n - (2\cos(3\pi/5))^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2^n)\left[\cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right], \text{ με } n \geq 0 .$$

Αυτή η φόρμα για το F_n δημιουργήθηκε από τον W. Hope-Jones το 1921.

<u>Παράδειγμα 2:</u>

Η ηλεκτροστατική είναι ο κλάδος της φυσικής που ασχολείται με τα φαινόμενα λόγω των έλξεων και των απωθήσεων των ηλεκτρικών φορτίων, ανάλογα με τις αποστάσεις μεταξύ τους, αλλά χωρίς εξάρτηση από την κίνησή τους. Το 1972, ενώ ήταν φοιτητής στο Ινδικό Στατιστικό Ινστιτούτο, ο Basil Davis μελέτησε το ακόλουθο πρόβλημα που αντιμετωπίζει η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος που περιλαμβάνει δύο αρνητικά φορτία και ένα θετικό. Έστω ότι δύο αρνητικά φορτία −q βρίσκονται στα σημεία Y και Z, ενώ ένα θετικό φορτίο +q βρίσκεται στο σημείο X όπως δείχνει η γραμμή στην εικόνα 13. Αν αντιστοιχίσουμε a στην απόσταση μεταξύ X και Y, και b στην απόσταση μεταξύ Y και Z, τότε μπορούμε να γράψουμε τα εξής:

(i) Για τα φορτία στα X και Y, η πιθανή ενέργεια είναι k((+q)(−q))/a.
(ii) Για τα φορτία στα Y και Z, η δυναμική ενέργεια είναι k((−q)(−q))/b και
(iii) Για τα φορτία στα X και Z, η δυναμική ενέργεια είναι k((+q)(−q))/(a + b), όπου k είναι μια σταθερά. [Στο σύστημα mks, k .= 8,99 × 10^9 (Nm^2)/C^2 (όπου N: νεύτονα, m: μέτρα και C: κουλόμπ) και δίνεται η δυναμική ενέργεια σε τζάουλ.]



Εικόνα 13 Φορτία σημείων X, Y, Z

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την αναλογία a/b έτσι ώστε η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι 0. Κατά συνέπεια, εξετάζουμε την εξίσωση

$$k\,\frac{(+q)(-q)}{a} + k\,\frac{(-q)(-q)}{b} + k\,\frac{(+q)(-q)}{a+b} = 0.$$

Αρχικά διαιρούμε με τη σταθερά k για να λάβουμε:

$$\frac{(+q)(-q)}{a} + \frac{(-q)(-q)}{b} + \frac{(+q)(-q)}{a+b} = 0.$$

Διαιρώντας με το q^2 παρατηρούμε ότι $-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha+b} = 0$.

Πολλαπλασιάζοντας με ab(a + b), καταλήγουμε :

$-b\,(\alpha + b) + \alpha\,(\alpha + b) - \alpha b = 0$
$-\alpha b - b^2 + \alpha^2 + \alpha b = 0$
$\alpha^2 - \alpha b - b^2 = 0$
$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{b}\right) - 1 = 0$, ένα τετραγωνικό σε $\frac{a}{b}$.

Οπότε, $(\alpha/b) = (-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2 - 4\,(1)(-1)})\,/\,(2(1)) = (1\pm\sqrt{5})\,/2$ και ως α> 0 και b> 0 , προκύπτει ότι για τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι 0,

$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$, η χρυσή τομή.

<u>Παράδειγμα 3:</u>

(α) Εδώ θα αξιολογήσουμε το $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$, οπότε:

$c = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$. Στη συνέχεια, τετραγωνίζοντας και τις δύο πλευρές αυτής της εξίσωσης, βλέπουμε ότι :

$c^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$ ή $c^2 = 1 + c$.

Συνεπώς, $c^2 - c - 1 = 0$ και $c = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\,(1)(-1)}}{2\,(1)} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Αφού c > 0, προκύπτει ότι $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,η χρυσή τομή.

(β) Αυτή τη φορά ας ξεκινήσουμε με την ακόλουθη ιδέα. Η σύνθεση

$2+\frac{1}{3+\frac{1}{7}}$, είναι ένα παράδειγμα πεπερασμένου συνεχιζόμενου κλάσματος. Μπορεί να απλοποιηθεί ως $2+\frac{1}{3+\frac{1}{7}} = 2+\frac{1}{\frac{22}{7}} = 2 + \frac{7}{22} = \frac{44+7}{22} = \frac{51}{22}$

Δεδομένου ότι η σημείωση μπορεί γρήγορα να γίνει αρκετά περίπλοκη, η παραπάνω έκφραση είναι συχνά γράφεται ως [2, 3, 7]. Γενικά, αν το α_1 είναι μη αρνητικός ακέραιος και οι $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί ακέραιοι, τότε το πεπερασμένο συνεχιζόμενο κλάσμα

$$\alpha_1+\frac{1}{\alpha^2+\frac{1}{\alpha^3+\frac{1}{\cdots+\frac{1}{\alpha_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n}}}}}$$

μπορεί επίσης να αντιπροσωπεύεται από $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n]$.

Λοιπόν, εξετάστε τώρα τα ακόλουθα τέσσερα πεπερασμένα συνεχόμενα κλάσματα:

(1) 1 (2) $1 + \frac{1}{1}$ (3) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ (4) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$

Απλοποιώντας αυτά τα πεπερασμένα συνεχόμενα κλάσματα, βρίσκουμε τα εξής:

(1) $1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_2}{F_1}$

(2) $1+\frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 = \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2}$

(3) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1+\frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{F_4}{F_3}$

(4) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \frac{F_5}{F_4}$

Σε αυτό το σημείο στρέφουμε την προσοχή μας στο άπειρο συνεχιζόμενο κλάσμα

$$c = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $c = 1 + \frac{1}{c}$, οπότε $c^2 = c + 1$ ή $c^2 - c - 1 = 0$.

Επομένως ,
$c = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\,(1)(-1)}}{2\,(1)} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Αλλά αφού c > 0 , τότε c = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, μια άλλη περίπτωση της χρυσής αναλογίας.
(Εναλλακτικά, από τα συνεχιζόμενα κλάσματα στο (1)–(4), το μοτίβο υπονοεί ότι c= $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ = α).
Τα επόμενα δύο παραδείγματά μας περιλαμβάνουν λίγο από τη θεωρία των πιθανοτήτων.

<u>Παράδειγμα 4:</u>

Ας υποθέσουμε ότι το S είναι ο δειγματικός χώρος για ένα πείραμα ε. Αν τα A, B είναι γεγονότα από S με A ∪ B = S, A ∩ B = ∅, P(A) = p, η πιθανότητα ότι το γεγονός A συμβαίνει, και P(B) = p^2, η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός B, ποια είναι η τιμή του p;
Αφού A ∩ B = ∅, έχουμε

$$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Οπότε:

$$1 = p + p^2 \text{ ή } p^2 + p - 1 = 0.$$

Με τον τετραγωνικό τύπο, οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι
p = $(-1\pm\sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}) / (2(1)) = (-1\pm\sqrt{5})/2$. Από $(-1 - \sqrt{5})/2 < 0$, αυτό ακολουθεί ότι $p = (-1 + \sqrt{5})/2 = -\beta$. (Ας μην παρασυρθούμε από αυτό το αρνητικό πινακίδα μπροστά από το β. Εξάλλου, β < 0, άρα −β ≈ 0,61803398... > 0.)

<u>Παράδειγμα 5:</u>

Ο Ντέρεκ και ο Ράιν πετούν ένα φορτωμένο νόμισμα, όπου p (> 0) είναι η πιθανότητα το κέρμα ανεβαίνει ψηλά όταν πετιέται. Ο πρώτος από αυτούς τους δύο εκκολαπτόμενους τζογαδόρους να αποκτήσει ένα κεφάλι είναι ο νικητής. Ο Ράιν πηγαίνει πρώτος, αλλά αν πετάξει μια ουρά, τότε ο Ντέρεκ παίρνει δύο ευκαιρίες. Αν πετάξει δύο ουρές, τότε ο Ράιν ξαναρίχνει το νόμισμα και αν πετάξει είναι μια ουρά, τότε ο Derek πηγαίνει πάλι δύο φορές (αν η πρώτη του ρίψη είναι ουρά). Αυτό συνεχίζεται μέχρι κάποιος πετάει ένα κεφάλι. Ποια τιμή του p κάνει αυτό ένα δίκαιο παιχνίδι (δηλαδή, ένα παιχνίδι που τόσο ο Ράιν όσο και ο Ντέρεκ έχουν πιθανότητα 1/2 νίκης);
Τώρα η πιθανότητα ο Ράιν να κερδίσει αυτό το παιχνίδι είναι:
$p + (1 - p)(1 - p)^2p + (1 - p)(1 - p)^2(1 - p)(1 - p)^2p + \cdots,$

όπου το πρώτο άθροισμα ,δηλαδή το p, αντιστοιχεί στο πότε ο Ράιν τυγχάνει κεφάλι στη πρώτη ρίψη. Το δεύτερο άθροισμα εξηγεί το πότε (i) ο Ράιν τυχαίνει ουρά στο πρώτο στροβίλισμα του νομίσματος, εξ ου και ο παράγοντας 1 – p. (ii) Ο Ντέρεκ τυχαίνει μια ουρά και στις δύο ρίψεις του — ως εκ τούτου ο συντελεστής $(1 - p)^2$ και, τέλος, ο Ράιν κερδίζει αφού έτυχε ένα κεφάλι στο επόμενο πέταγμα του , όπως υποδεικνύεται από τον παράγοντα p. Με παρόμοιο τρόπο, η τρίτη άθροιση υπολογίζει το πότε ο Ράιν κερδίζει— αφού έτυχε ουρά και στην πρώτη και στη δεύτερη ρίψη, ενώ ο Ντέρεκ έτυχε δύο φορές ουρά και στις δύο πρώτες και δεύτερες ρίψεις του.
Η παραπάνω έκφραση για το πότε ο Ράιν κερδίζει αυτό το παιχνίδι μπορεί επίσης να εκφραστεί ως :

$p[1 + (1 − p)^3 + (1 − p)^6 + (1 − p)^9 +\cdot\cdot\cdot] = p\left[\frac{1}{[1-(1-p)^3]}\right].$

Για να είναι δίκαιο αυτό το παιχνίδι, πρέπει να έχουμε Q

$\frac{1}{2} = \frac{p}{[1-(1-p)3]},$

Για να δούμε ότι
$p = \left(\frac{1}{2}\right)[1-(1-p)^3]$

$2p= [1-(1-p)^3] = 1- (1-3p +3p^2 –p^3)$
$2p = 3p -3p^2 +p$ και $0 = p^3 -3p^2 +p = p (p^2 -3p +1)$

Με $p> 0$, έχουμε $p^2-3p+1=0$ ή $p=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Αφού $p <1$, βρίσκουμε ότι

$p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^2 = \beta^2$.

3. Συμπεράσματα

Η εισαγωγή αναφέρεται στην ιστορική πορεία του ομώνυμου Μαθηματικού, θέτοντας ως εναρκτήριο πρόβλημα ανάδειξης των ακολουθιών το πρόβλημα των λαγών. Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας του πρώτου κεφαλαίου, εισάγεται η αναδρομή της ακολουθίας Fibonacci και οι σχετικές ιδιότητές της, παρουσιάζεται η σύζευξη των βασικών ιδιοτήτων της συνδυαστικής και οι εφαρμογές τους στη θεωρία συνόλων, δυαδικών ακολουθιών και μεταθέσεων. Στο δεύτερο κεφάλαιο συζητείται η διαιρετότητα των ακολουθιών Fibonacci και η αντιστοιχία των ιδιοτήτων τους με διάφορα συμπεράσματα σε παιχνίδια όπως το σκάκι , σε εφαρμογές στην οπτική και τη βοτανική. Το τελευταίο κεφάλαιο αφορά την ανάλυση της σύνδεσης των ακολουθιών με τη χρυσή τομή, την επίλυση της γραμμικής αναδρομικής σχέσης και της μορφής Binet των ακολουθιών, την προβολή αντιστοίχισης αυτής της θεωρίας με εφαρμογές στην τριγωνομετρία, τα συνεχή κλάσματα και τις πιθανότητες.

Ένα συμπέρασμα που συνάγεται από την προετοιμασία αυτής της εργασίας είναι η σημασία της προώθησης της εφαρμογής της ακολουθίας Fibonacci σε όλες τις πτυχές της επιστήμης και σε πρακτικά παραδείγματα στην καθημερινή ζωή, προκειμένου να τονιστεί πόσο απαραίτητο είναι να γνωρίζουμε τις ιδιότητες της. Η Φύση φροντίζει να μας δώσει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε και τα μαθηματικά είναι βασική γλώσσα του νου και της πράξης. Είναι ωφέλιμο να κατανοήσουμε ότι για να εντοπίσουμε τις αρχές και τις ιδιότητες της ακολουθίας, οφείλουμε να κατανοούμε τη λειτουργία και τη ποικιλομορφία του ίδιου του φυσικού περιβάλλοντος. Αποδεικνύεται λοιπόν πόσο συχνά εμφανίζονται οι αριθμοί Fibonacci και πόσο ύψιστης σημασίας είναι η γνώση τους.

Με βάση τα ανωτέρω, εντοπίζουμε ότι η μαθηματική βελτιστοποίηση και έρευνα της ακολουθίας αποτελεί ένα ταχύτατα αναπτυσσόμενο πεδίο έρευνας, με πολλές δυνατότητες για μεγαλύτερη εξέλιξη. Μια πρόταση για διδακτορική διατριβή αφορά τη συνέχεια της εν λόγω διπλωματικής, με αναφορά στο Προσεταιριστικό νόμο και την ιδιαίτερη χρήση της φιλοσοφίας των αριθμών Φιμπονάτσι στην χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με συνδυαστική έρευνα πάνω στην τεχνητή νοημοσύνη, μιας και είναι ένας ιδιαίτερος, φιλοσοφικά, ηθικά και μαθηματικά, συζητήσιμος τομέας ανάπτυξης της τεχνολογίας.

4. Βιβλιογραφία

Αθανασιάδης, Ν. (1985). *Δασική Βοτανική Μέρος Ι. Συστηματική Σπερματοφύτων.* (Γιαχούδη Γιαπούλη).

Αθανασίου, Α. (2013, Μάρτιος 22). *Οι υπέροχοι και μυστήριοι αριθμοί Fibonacci*. Ανακαλύπτω. https://www.anakalipto.net/2013/03/fibonacci.html

Αντωνιάδης, Γ., & Κοντογεώργης`, Α. (2015). *Θεωρία Αριθμών και εφαρμογές*. Ελληνικά ακαδημαϊκά ηλεκτρονικά συγγράμματα και βοηθήματα - αποθετήριο κάλλιπος.

Μπέντζαμιν, Ά. (2013). *Η μαγεία της ακολουθίας Φιμπονάτσι* [Βίντεο]. Talk at an official TED conference, TEDGlobal. https://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_the_magic_of_fibonacci_numbers?language=el

Οι αριθμοί Φιμπονάτσι-το αριθμητικό σύστημα της φύσης. (2017, Ιανουάριος). *ΦΥΛΛΟ ΝΟ 3*, 4,5 από 20.

Σκαρδανάς, Η. (2019). *Η Ακολουθία Fibonacci*. https://www.academia.edu/44856026/%CE%91%CE%BA%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CF%85%CE%B8%CE%AF%CE%B1_Fibonacci

Χαραλαμπίδης, Χ. (2000). *Συνδυαστική, τεύχος 1*. Εκδόσεις Συμμετρία.

DEVLIN, K. (2018). *Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ Ο ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ ΚΑΙ Η ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ*. ΠΕΚ (ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ).

Grimaldi, R. (2012). *Fibonacci and catalan numbers _ an introduction* (Rose-Hulman Institute of Technology). Wiley,John Wiley & Sons.

Knott, R. (2016). *The Fibonacci Numbers and Golden section in Nature: τ. University of Surrey*.

Livio, M. (2002). *The Golden Ratio: The Story o(Phi, the World's Most Astonishing Number (First trade paperback ε&).* (Broadway Books).

The Fibonacci Association Official Website. (2022). https://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/

Vogel, H. (1979). *A better way ti construct the sunflower head.*

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.